H17T2A3

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Von einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$f(0{,}0) = 0$; $\partial_1 f(0{,}0) = 1$; $\partial_2 f(0{,}0) = 2$. Hierbei bezeichnet ∂_j den partiellen Ableitungsoperator nach der j−ten Koordinate. Auch sei eine weitere Funktion g wie folgt gegeben: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to g(t) := f\big(f(t,t), f(-t,t)\big)$. Berechnen Sie den Wert der Ableitung g'(0).

c) Bestimmen Sie den Wertebereich W(f) der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,; (x,y,z) \to (x,y,z)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zu a)

Seien die Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und die Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^m, g: V \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $f(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$.

Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und für jedes $a \in U$ gilt $\partial(g \circ f)(a) = \partial(g)\big(f(a)\big) \circ \partial(f)(a)$; diese drei sind stetige lineare Abbildungen.

Für die Jacobimatrizen gilt: $J(g \circ f)(a) = J(g)\big(f(a)\big) * J(f)(a)$.

Zu b)

Mit $h_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \to (t,t)$ und $h_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \to (t,-t)$ gilt: $g(t) = f\Big(f\big(h_1(t)\big), f\big(h_2(t)\big)\Big)$. Als lineare Abbildungen sind h_1 und h_2 beliebig oft differenzierbar. Laut Kettenregel sind damit auch $f \circ h_1$ und $f \circ h_2$ beliebig oft stetig differenzierbar. Die Abbildung $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \to \Big(f\big(h_1(t)\big), f\big(h_2(t)\big)\Big)$ ist (als Abbildung mit Werten in einem Produkt) stetig lt. VL mit $(\partial j)(t) = \Big(\partial\Big(f\big(h_1(t)\big)\Big), \partial\Big(f\big(h_2(t)\big)\Big)\Big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $j(0) = (0, 0)$.

Laut Kettenregel ist $\partial\Big(f\big(h_1(t)\big)\Big) = \partial(f)\big(h_1(t)\big) \circ \partial(h_1)(t) = \partial(f)\big(h_1(t)\big) \circ h_1$ also $\partial(f \circ h_1)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; y \to \ \partial(f)\big(h_1(t)\big) \circ h_1(y) = \langle grad(f)\big(h_1(t)\big), (y,y)\rangle = \partial_1 f(t,t)y + \partial_2 f(t,t)y$ und analog

$\partial(f \circ h_2)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; y \to \ \partial(f)\big(h_2(t)\big) \circ h_2(y) = \partial_1 f(t,-t)y + \partial_2 f(t,-t)(-y)$.

Laut Kettenregel folgt aus $g(t) = f\big(j(t)\big)$, dass $(\partial g)(t) = (\partial f)\big(j(t)\big) \circ (\partial j)(t)$. Einsetzen von $t = 0$ gibt $g'(0) = (\partial g)(t) = (\partial f)\big(j(0)\big) \circ (\partial j)(0) = (\partial f)(0{,}0) \circ (\partial j)(0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \to g'(0)(y)$ $= \big((\partial f)(0{,}0) \circ (\partial j)(0)\big)(y) = \langle grad(f)(0{,}0), \begin{pmatrix} \big(\partial_1 f(0{,}0) + \partial_2 f(0{,}0)\big)y \\ \big(\partial_1 f(0{,}0) - \partial_2 f(0{,}0)\big)y \end{pmatrix}\rangle =$ $\partial_1 f(0{,}0)\big(\partial_1 f(0{,}0) + \partial_2 f(0{,}0)\big)y + \partial_2 f(0{,}0)\big(\partial_1 f(0{,}0) - \partial_2 f(0{,}0)\big)y = 1(1+2)y + 2(1-2)y = y$. Somit aus folgt $g'(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \to g'(0)(y) = y$, dass $g'(0) = 1$.

Zu c)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist selbstadjungiert und $\det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$ $(3-\lambda)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda) - 2\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) =$ $(1-\lambda)\big(2-\sqrt{3}-\lambda\big)\big(2+\sqrt{3}-\lambda\big)$. Daher hat $\mathbb{R}^3$ eine Orhthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) bestehend aus den Eigenvektoen zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2-\sqrt{3}, \lambda_3 = 2+\sqrt{3}$, alle > 0.

Schreibe $x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$; $c_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $\langle x, Ax \rangle = \langle c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3\,, 1c_1v_1 + \big(2-\sqrt{3}\big)c_2v_2 + \big(2+\sqrt{3}\big)c_3v_3 \rangle = (*) = c_1^2\langle v_1, v_1\rangle + \big(2-\sqrt{3}\big)c_2^2\langle v_2, v_2\rangle + \big(2+\sqrt{3}\big)c_3^2\langle v_3, v_3\rangle =$ $(*) = c_1^2 + \big(2-\sqrt{3}\big)c_2^2 + \big(2+\sqrt{3}\big)c_3^2 \geq 0$. Also ist $f(\mathbb{R}^3) = [0; \infty[$.

(*) $\langle v_k, v_l \rangle = \begin{cases} 0 \text{ } f\text{ür } k \neq l \\ 1 \text{ } f\text{ür } k = l \end{cases}$, da die v_i eine Orthonormalbasis bilden, also senkrecht aufeinander stehen und Länge 1 haben.