Herbst 17 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $u_0 > 0$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(t) = u(t)^{u(t)}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass für jedes $u_0 > 0$ eine eindeutige maximale (nicht fortsetzbare) Lösung existiert.

(b) Man zeige für jedes $u_0 > 0$, dass die maximale Lösung nicht global auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist.
Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $u_0 > 1$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty), f(t) = t^t = \exp(t \ln t)$ ist als Verknüpfung stetig differenzierbarer Funktionen selbst stetig differenzierbar. Da jede Lösung positiven Anfangswert und positive Steigung hat, also streng monoton wächst, nimmt jede Lösung nur positive Werte an, liegt also im Definitionsbereich von f. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es zu jedem Anfangswert $u_0 > 0$ genau eine Maximallösung, welche sich nicht weiter fortsetzen lässt.

(b) Wir betrachten dem Hinweis folgend zunächst den Fall $u_0 > 1$. Wir bestimmen außerdem für $u_1 > 1$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y(0) = u_1, \\ y'(t) = y(t)^{u_1}, \quad t \geq 0 \end{cases}, (1)$$

welches sich durch Trennung der Variablen lösen lässt. Die maximale Lösung ist für $t \in [0, \frac{u_0^{1-u_0}}{u_0-1})$ definiert, durch $y(t) = ((1-u_0)t+u_0^{1-u_0})^{\frac{1}{1-u_0}} = \frac{1}{\sqrt[u_0-1]{(1-u_0)t + u_0^{1-u_0}}}$ gegeben und nicht weiter fortsetzbar, insbesondere gilt $\lim\limits_{t \to \frac{u_0^{1-u_0}}{u_0-1}-} \mathrm{u(t)} = +\infty$.

Betrachten wir die Funktion f etwas genauer, so stellen wir fest, dass die Ableitung durch $f'(t) = t^t(1 + \ln t)$ gegeben ist, welche als einzige Nullstelle $t_0 = e^{-1}$ hat und für $0 < t < t_0$ negativ aber für $t_0 < t < +\infty$ positiv ist. Daher hat f bei t_0 ein globales Minimum und erfüllt $f(t_0) = e^{-e}$. Wegen $e > 1$ ist $t_0 < 1$ und daher f streng monoton wachsend auf $(1, +\infty)$.

Wir kommen nun zur Aufgabe. Sei u die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus der Aufgabenstellung, wobei u_0 zunächst $u_0 > 1$ erfüllen solle. Wir haben bereits zuvor festgestellt, dass diese strikt positive Werte annimmt und streng monoton wächst. Wir nehmen an diese wäre global definiert. Zu u_0 finden wir ein $1 < u_1 < u_0$ und betrachten wir die zuvor definierte Funktion $y(t)$, also die Lösung von (1) zum Anfangswert u_1 und stellen fest, dass $y'(0) = u_1^{u_1} < u_0^{u_0} = u'(0)$ und $y(0) = u_1 < u_0 = u(0)$ gilt, also ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für $t \in (0, \varepsilon)$ die Ungleichung $u(t) > y(t)$ gilt. Wir behaupten, dass diese Ungleichung auf dem gesamten

Definitionsintervall von y gilt, wäre dem nämlich nicht so, also gäbe es ein $\tilde{t}$ mit $y(\tilde{t}) > u(\tilde{t})$, so würde es nach dem Zwischenwertsatz ein $s \in [\varepsilon, \tilde{t})$ geben, sodass $y(s) = u(s)$ gilt. Die Menge $\{s \in [0, \tilde{t}] : y(s) = u(s)\}$ ist damit nichtleer, abgeschlossen und nach oben beschränkt, besitzt also ein Minimum M. Für $t < M$ muss die Ungleichung $u(t) < y(t)$ gelten, weil beide Funktionen stetig sind und für $t = 0$ die Ungleichung gilt (sonst gäbe es eine kleinere Stelle als M für die Gleichheit eintritt, was nicht sein kann). Nun ist aber $u'(t) = u(t)^{u(t)} > u(t)^{u_0} > y(t)^{u_0} = y'(t)$ für $t \in [0, M)$, woraus folgt, dass $u(t) - y(t)$ streng monoton wächst. Also muss $u(t) - y(t) > u(0) - y(0) = u_0 - u_1 > 0$ für alle t in $[0, M)$ gelten. Damit ist aber $0 = u(M) - y(M) = \lim_{t \to M-} u(t) - y(t) \geq \lim_{t \to M-} u_0 - u_1 = u_0 - u_1 > 0$, ein Widerspruch. Also gilt die strikte Ungleichung auf dem gesamten Existenzintervall von y, was wiederum einen Widerspruch zur globalen Existenz von u liefert, denn y hat eine endliche Entweichzeit und minorisiert u. Also kann auch u nicht global auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert sein, was den Beweis für $u_0 > 1$ abschließt.
Ist nun $0 < u_0$, so gilt stets $u'(t) = u(t)^{u(t)} = f(t) \geq e^{-e} > 0$, wir haben also eine positive, untere Schranke für die Ableitung von u. Durch $u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s)\mathrm{d}s \geq u_0 + te^{-e}$, was für $t \to \infty$ ebenso gegen ∞ divergiert. Wir finden also ein $z > 0$ mit $u(z) > 1$. Weil die Differentialgleichung autonom ist, ist für die Lösung v des Problems zum Anfangswert u_0 die Funktion $v(t - z)$ eine Lösung der Gleichung zum Anfangswert $u(z)$. Wäre v global definiert, so auch $v(t - z)$, ein Widerspruch zu bisher bewiesenem. Daher ist für keinen positiven Anfangswert die Lösung auf $[0, \infty)$ existiert und die Aussage ist gezeigt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$