H17T2A1

a) Dezimalziffern einer rationalen Zahl $\frac{a}{b} \in [0,1[$: Gegeben seien zwei Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$. Die Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden wie folgt rekursiv definiert:

$$r_0 := a, \quad z_{n+1} := \left\lfloor \frac{10r_n}{b} \right\rfloor, \quad r_{n+1} := 10r_n - bz_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$ den ganzzahligen Anteil von $x \in \mathbb{N}$. Beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $0 \leq r_n < b$, $r_n \in \mathbb{N}_0$, $z_{n+1} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

b) Beweise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0,$$

indem explizit die Definition der Konvergenz reeller Folgen nachgeprüft wird.

c) Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{10^k} = \frac{a}{b}$$

Zu a):

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 \leq r_n < b$, $r_n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

Falls zudem $n > 0$, so gilt auch $z_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 0 : 0 \leq r_0 = a < b$ und $r_0 = a \in \mathbb{N}_0$ sind gegeben. Es folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{b} = \sum_{k=1}^{0} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_0}{10^0 b},$$

denn die Summe über k hat hier keinen Summanden, also den Wert 0.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Aus der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$0 \leq \frac{10 r_n}{b} < \frac{10b}{b} = 10$$

und daher auch

$$0 \leq z_{n+1} = \left\lfloor \frac{10 r_n}{b} \right\rfloor \leq \frac{10 r_n}{b} < 10 \tag{1}$$

Wegen $z_{n+1} \in \mathbb{Z}$ folgt hieraus $z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Aus (1) und $b > 0$ schließen wir

$$b z_{n+1} \leq 10 r_n \tag{2}$$

und damit

$$r_{n+1} = 10 r_n - b z_{n+1} \geq 0. \tag{3}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $r_n \in \mathbb{Z}$. Mit $b, z_{n+1} \in \mathbb{Z}$ erhalten wir hieraus auch $r_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Wir formen die Gleichung (3) um in

$$\frac{r_n}{10^n b} = \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir hieraus

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}.$$

Damit sind alle Teile der Induktionsbehauptung für n+1 gezeigt.

Zu b):

Zu zeigen ist:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| < \epsilon \right)$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Mit dem archimedischen Axiom wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gegeben. Es folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$(1+9)^n = 10^n \geq 1 + 9n \geq n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

und daher die Behauptung:

$$\left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| = \frac{1}{10^n} < \epsilon$$

Zu c):

Zu zeigen ist

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \left(n \geq n_0 \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} - \frac{a}{b} \right| < \epsilon \right)$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Mit Teilaufgabe b) wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ gilt: $10^{-n} < \epsilon$. Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gegeben. Aus Teilaufgabe a) wissen wir

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

wobei $0 \leq r_n < b$. Es folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} - \frac{a}{b} \right| = \frac{r_n}{10^n b} < \frac{1}{10^n} < \epsilon,$$

was zu zeigen war.