Herbst 17 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben seien die offene Menge

$$M = \{(s,t,u)|\ 0 < s < t < 2\pi, 0 < u < 2\} \subset \mathbb{R}^3,$$

die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}^3, \quad f(s,t,u) = (us\cos t, us\sin t, us + ut),$$

der Wertebereich von f

$$G = \{f(s,t,u)|\ 0 < s < t < 2\pi, 0 < u < 2\} \subset \mathbb{R}^3$$

und die Schraubenfläche

$$S = \{f(s,t,1)|\ 0 < s < t < 2\pi\} \subset G.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : M \to G$ ein Diffeomorphismus ist, also stetig differenzierbar und bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

(b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Schraubenfläche S.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Gebiets G.

Lösungsvorschlag:

(a) Als Verknüpfung stetig differenzierbarer Funktionen ist f offensichtlich C^1-Funktion und per definitionem von G zudem surjektiv. Wir müssen noch zeigen, dass f injektiv ist. Seien $(s,t,u), (s',t',u') \in M$ mit $f(s,t,u) = f(s',t',u')$, dann folgt durch Addition der Quadrate der ersten beiden Komponenten und dem trigonometrischen Pythagoras die Identität $u^2s^2 = (u')^2(s')^2$ und durch Radizieren schließlich $us = u's'$, weil alle Variablen positiv sind. Aus der Gleichheit der dritten Komponenten folgt daraus auch $ut = u't'$. Bekanntermaßen ist die Abbildung $(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ injektiv auf der Menge $(0,\infty) \times (0,2\pi)$, daher folgt wegen $us, u's' > 0$ und $t, t' \in (0{,}2\pi)$ aus der Gleichheit der ersten beiden Komponenten auch $t = t'$ ($us = u's'$ wissen wir bereits, hätten wir aber auch so zeigen können). Weil $t = t' > 0$ ist, folgt durch Division $u = u'$ und daraus ganz genauso $s = s'$. Also ist $(s,t,u) = (s',t',u')$ und f injektiv, also bijektiv und die Umkehrabbildung existiert. Wir berechnen die Jacobimatrix von f, sowie deren Determinante:

$$Jf(s,t,u)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u\cos t & u\sin t & u \\ -us\sin t & us\cos t & u \\ s\cos t & s\sin t & s+t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \implies \det(Jf(s,t,u)^{\mathrm{T}}) =& u^2s(s+t)\cos^2 t + u^2 s\sin t\cos t - u^2s^2\sin^2 t \\ & -u^2s^2\cos^2 t - u^2 s\sin t\cos t + u^2 s(s+t)\sin^2 t \\ =& u^2 s(s+t) - u^2s^2 = u^2st > 0. \end{aligned}$$

Die Jacobimatrix ist daher in jedem Punkt invertierbar (det > 0), außerdem ist f bijektiv und stetig differenzierbar. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung ist G offen und $f^{-1}: G \to M$ stetig differenzierbar. Also ist f ein Diffeomorphismus.

(b) Selbstverständlich ist die Abbildung $g : A := \{(s,t) |\ 0 < s < t < 2\pi\} \to S, g(s,t) = f(s,t,1)$ bijektiv und stetig differenzierbar, wobei $A \subset \mathbb{R}^2$ offen ist. Wir können das Oberflächenintegral mittels der Flächenformel berechnen, wofür wir noch die Jacobische von g brauchen. Die Jacobimatrix erfüllt $Jg(s,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, was man durch Nachrechnen verifiziert oder indem man die ersten beiden Zeilen von $Jf(s,t,1)$ betrachtet. Für den Oberflächeninhalt $\mathcal{H}^2(S)$ gilt

$$\mathcal{H}^2(S) = \int_S 1 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_A \sqrt{\det((Jg)^{\mathrm{T}} Jg(s,t))} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^2(s,t) = \int_0^{2\pi} \int_s^{2\pi} \sqrt{2s^2+1} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2s^2+1}(2\pi - s)\mathrm{d}s$$

wobei der Satz von Fubini benutzt wurde, die Lebesgueintegrale in Riemannintegrale umgewandelt wurden, welche mit dem HDI berechnet worden sind und die Determinante von $((Jg)^{\mathrm{T}} Jg)$ eingesetzt wurde, welche durch $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & s^2+1 \end{pmatrix} = 2(s^2+1) - 1 = 2s^2+1$ gegeben ist. Das letzte Integral müssen wir noch berechnen, dazu multiplizieren wir aus und integrieren Minuend und Subtrahend separat. Für den Minuenden substituieren wir $s = \frac{\sinh(t)}{\sqrt{2}}$ und erhalten $\mathrm{d}s = \frac{\cosh(t)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$, sowie 0 und $\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)$ als neue Integralgrenzen, weswegen wir mit der Definition von $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2} > 0$ und der Rechenregel $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2s^2+1} \,\mathrm{d}s = \int_0^{\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)} \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(t)^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}{8\sqrt{2}}\right]_0^{\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)}$$

berechnen können und als Ergebnis $\frac{1}{4\sqrt{2}} \sinh(2\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)$ erhalten.
Das andere Integral ist einfacher, es gilt nämlich

$$\int_0^{2\pi} s\sqrt{2s^2+1} \,\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{6}(2s^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6}(8\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}.$$

Setzen wir alles zusammen, so folgt $\mathcal{H}^2(S) = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{2s^2+1} \,\mathrm{d}s - \int_0^{2\pi} s\sqrt{2s^2+1} \,\mathrm{d}s =$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sinh(2\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi)) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi) + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(8\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

(c) Nach dem Satz von Fubini, können wir dieses Volumen als Integral über Schnitte berechnen, d. h. es gilt $V(G) = \int_0^{2\pi} \mathcal{H}^2(\{f(s,t,u) |\ 0 < s < t < 2\pi\})\mathrm{d}u$. Wegen $f(s,t,u) = uf(s,t,1)$, gilt $\mathcal{H}^2(\{f(s,t,u) |\ 0 < s < t < 2\pi\}) = u^2\mathcal{H}^2(S)$ für alle $0 < u < 2\pi$ und wir erhalten

$$V(G) = \int_0^{2\pi} u^2 \mathcal{H}^2(S)\mathrm{d}u = \mathcal{H}^2(S)\frac{8}{3}\pi^3.$$

$\mathcal{J.F.B.}$