H17T1A4

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$x' = \frac{x^2}{1+t^2},\ x(0) = c$, wobei c>0 ein positiver Parameter ist. (1)

a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit 0 ∈ I und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

b) Man finde ein offenes Intervall I mit 0 ∈ I und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

c) Man setze ϕ c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c);\ t^+(c)[\ \to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c$ für $t \to t^-(c)$ und $t \to t^+(c)$?

Zu a)

Wegen $1 + t^2 \geq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (t,x) \to \frac{x^2}{1+t^2}$ eine wohldefinierte stetig differenzierbare Funktion. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat für jedes $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem $x' = f(t,x),\ x(\tau) = \xi$ eine eindeutig definierte maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to\ \mathbb{R}$. Speziell für $\xi = 0$ ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \to 0$ Lösung von $x' = f(t,x) = \frac{x^2}{1+t^2}; x(\tau) = 0$ und da diese Lösung auf $\mathbb{R}$ existiert („richtiges“ Randverhalten für max. Lsg.), ist es die maximale Lösung $\lambda_{(\tau,0)}$. Für c>0 sind die Graphen $\Gamma\left(\lambda_{(0,c)}\right) = \{\left(t, \lambda_{(0,c)}(t)\right) : t \in I_{(0,c)}\}$ und $\Gamma\left(\lambda_{(0,0)}\right) = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ disjunkt – da z.B. für τ=0 die Lösungen verschieden sind. Da jede Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Einschränkung von $\lambda_{(0,c)}$ ist, hat auch φ keine Nullstelle.

Zu b)

Mit Trennen der Variablen

$$\int_c^{\varphi_c(t)} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Big|_c^{\varphi_c(t)} = \int_0^t \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan(s)\Big|_0^t,$$ also

$$\frac{-1}{\varphi_c(t)} - \frac{-1}{c} = \arctan(t) - \arctan(0),$$ also $$\varphi_c(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} - \arctan(t)}$$ (ist für t=0 definiert.)

Wegen arctan(0)=0 ist dies in einer Umgebung von 0 definiert und zwar

i) Für $\frac{1}{\mathrm{c}} \geq \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{1}{c} - \arctan(t) > 0\, f\ddot{u}r\ alle\ t \in \mathbb{R}$, also ist $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{\frac{1}{c} - \arctan(t)}$ wohldefiniert und wegen

$$\varphi'_c(t) = \frac{-\frac{-1}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{c} - \arctan(t)\right)^2} = \frac{\left(\varphi_c(t)\right)^2}{1+t^2},\ \varphi_c(0) = c$$ eine Lösung von (1). Da φ_c schon auf $\mathbb{R}$ definiert ist, also das Randverhalten einer maximalen Lösung hat, gilt $\varphi_c = \lambda_{(0,c)}$.

ii) Für $0 < \frac{1}{c} < \frac{\pi}{2}$ hat $\frac{1}{c} - \arctan(t)$ nur eine Nullstelle bei $t = \tan\left(\frac{1}{c}\right) > 0$, also ist $\varphi_c\colon]-\infty; \tan(\frac{1}{c})[\ \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{\frac{1}{c} - \arctan(t)}$ wohldefiniert, $\varphi_c(0)=c$ und

$$\varphi'_c(t) = \frac{-\frac{-1}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{c} - \arctan(t)\right)^2} = \frac{\left(\varphi_c(t)\right)^2}{1+t^2} \, für\ t \in]-\infty; \tan(\frac{1}{c})[,$$ somit eine Lösung von (1)

Da $\lim_{t\to\tan(\frac{1}{c})} \varphi_c(t) = \infty$ und da die untere Intervallgrenze $-\infty$ ist, gilt $\varphi_c = \lambda_{(0,c)}$, denn φ_c hat das Randverhalten einer maximalen Lösung und ist als Lösung von (1) somit die gesuchte maximale Lösung.

Zu c)

Wir haben in b) die maximalen Lösungen gefunden:

i) Für $\frac{1}{c} \geq \frac{\pi}{2}$ ist dies $\tilde{\varphi}_c = \lambda_{(0,c)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \to \frac{1}{\frac{1}{c} - \arctan(t)}$, also

$t^-(c) = -\infty,\ t^+(c) = \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} \tilde{\varphi}_c(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{\pi}{2}}$ bzw.

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\varphi}_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{\pi}{2}}\ für \frac{1}{c} > \frac{\pi}{2} \\ \infty\ \ für\ \frac{1}{c} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ii) Für $0 < \frac{1}{c} < \frac{\pi}{2}$ ist dies

$\tilde{\varphi}_c = \lambda_{(0,c)}\colon]-\infty; \tan\left(\frac{1}{c}\right)[\to \mathbb{R};\ t \to \frac{1}{\frac{1}{c} - \arctan(t)}$, also

$t^-(c) = -\infty,\ t^+(c) = \tan\left(\frac{1}{c}\right)$ und $\lim\limits_{t \to -\infty} \widetilde{\varphi}_c(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{c} + \frac{\pi}{2}}$ bzw.

$\lim\limits_{t \to \tan\left(\frac{1}{c}\right)} \widetilde{\varphi}_c(t) = \infty.$