H17T1A3

Gegeben sei das ebene autonome System

$$x' = x^2y + 3y =: f(x,y)$$

$$y' = -xy^2 - 3x =: g(x,y)$$

Man zeige:

a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.

b) Das System ist ein Hamiltonsches System, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = f$.

c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems. Das heißt für jede Lösung φ gilt $H \circ \varphi = \text{const}$.

d) Jede Lösung φ ist beschränkt.

e) Jede maximale (d.h. nicht fortsetzbare) Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

f) Die Nulllösung ist stabil, aber nicht attraktiv.

Zu a):

Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{gathered}
\text{(x,y) ist eine Ruhelage des Systems} \\
\Leftrightarrow f(x,y) = 0 = g(x,y) \\
\Leftrightarrow y(x^2+3) = 0 = -x(y^2+3) \\
\Leftrightarrow (y = 0 \text{ oder } x^2 = -3) \text{ und } (x = 0 \text{ oder } y^2 = -3) \\
\Leftrightarrow y = 0 \text{ und } x = 0 \\
\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)
\end{gathered}$$

was zu zeigen war. Wir haben hier verwendet, dass für alle reellen Zahlen r gilt: $r^2 \neq -3$.

Zu b):

Wir definieren $H(x,y) := \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{3}{2}(x^2+y^2)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für solche (x,y) folgt dann die Behauptung so [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= xy^2 + 3x = -g(x,y)\\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= x^2y + 3y = f(x,y)\end{aligned}$$

Zu c):[2]

Wir gehen davon aus, dass das in Teil (b) gefundene H gemeint ist. Nach der Kettenregel gilt für $t \in \mathbb{R}$ mit der Bezeichnung $\varphi(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H\circ\varphi(t) &= DH(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = (D_1H(x(t),y(t)), D_2H(x(t),y(t)))\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}\\ &= (-g(x(t),y(t)), f(x(t),y(t)))\begin{pmatrix}f(x(t),y(t))\\ g(x(t),y(t))\end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

.

Weil diese Ableitung verschwindet, ist $H \circ \varphi$ konstant.

Alternative:

zzg.: $H\circ\varphi = \text{const.} \Leftrightarrow (H\circ\varphi)' = 0$ mit $\varphi := \begin{pmatrix}x_\varphi\\ y_\varphi\end{pmatrix}$ Lösung des Systems

$$(H\circ\varphi)' = \frac{3}{2}(x_\varphi^2)' + \frac{3}{2}(y_\varphi^2)' + \frac{1}{2}(x_\varphi^2y_\varphi^2)' = 3x_\varphi x_\varphi' + 3y_\varphi y_\varphi' + x_\varphi y_\varphi(x_\varphi' y_\varphi + x_\varphi y_\varphi') =$$

$$3x_\varphi(x_\varphi^2y_\varphi+3y_\varphi)+3y_\varphi(-x_\varphi y_\varphi^2-3x_\varphi)+x_\varphi y_\varphi(y_\varphi(x_\varphi^2y_\varphi+3y_\varphi)+x_\varphi(-x_\varphi y_\varphi^2-3x_\varphi)) =$$

$$3x_\varphi^3y_\varphi + 9x_\varphi y_\varphi - 3x_\varphi y_\varphi^3 - 9x_\varphi y_\varphi + x_\varphi^3y_\varphi^3 + 3x_\varphi y_\varphi^3 - x_\varphi^3y_\varphi^3 - 3x_\varphi^3y_\varphi = 0$$

Zu d):

Es sei $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Wir beobachten zunächst

$$H(x,y) \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2) = \frac{3}{2}\|(x,y)\|_2^2$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, so dass für alle $c \in \mathbb{R}$ das Niveaugebilde

$$N_c := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | H(x,y) = c\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \|(x,y)\|_2^2 \leq \frac{2}{3}c\}$$

[1] Jede andere Funktion $\tilde{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit dem gleichen Gradienten unterscheidet sich von H nur um eine Konstante, weil der Gradient von $\tilde{H} - H$ verschwindet.

[2] H ist in der Aufgabenstellung nicht eindeutig gegeben, sondern nur bis auf eine Konstante bestimmt. Insofern ist die Aufgabe nicht ganz präzise formuliert.

beschränkt ist. Mit c) wissen wir:

$$\{\varphi(t) | t \in]a,b[\} \subseteq N_{H(\varphi(t_0))}$$

für jedes $t_0 \in]a,b[$; also ist φ ebenfalls beschränkt.

Alternative:

Da $(H \circ \varphi) = const. \Rightarrow \frac{3}{2}(x_\varphi^2) + \frac{3}{2}(y_\varphi^2) + \frac{1}{2}(x_\varphi^2 y_\varphi^2) = c_1$, mit $c_1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_\varphi^2(3 + y_\varphi^2) = c_1 - \frac{3}{2}y_\varphi^2$$

$$\Rightarrow x_\varphi^2 = \frac{2c_1 - 3y_\varphi^2}{\underbrace{(3 + y_\varphi^2)}_{\geq 0}}$$

$$\overset{da\, y_\varphi^2 \geq 0}{\Rightarrow} 2c_1 - 3y_\varphi^2 \geq 0 \Rightarrow y_\varphi^2 \leq \frac{2}{3}c_1$$

also $y_\varphi \in [-\frac{2}{3}c_1, \frac{2}{3}c_1]$ für $c_1 \in \mathbb{R}^+$

analog gilt auch $\frac{1}{2}y_\varphi^2(3 + x_\varphi^2) = c_1 - \frac{3}{2}x_\varphi^2$

$$\Rightarrow y_\varphi^2 = \frac{2c_1 - 3x_\varphi^2}{\underbrace{(3 + x_\varphi^2)}_{\geq 0}} \Rightarrow 2c_1 - 3x_\varphi^2 \geq 0 \Rightarrow x_\varphi^2 \leq \frac{2}{3}c_1$$

also $x_\varphi \in [-\frac{2}{3}c_1, \frac{2}{3}c_1]$ für $c_1 \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \varphi := \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{pmatrix}$ ist beschränkt.

Zu e):

Es sei $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung. Wir verwenden den folgenden *Satz über das Randverhalten maximaler Lösungen:*[3] Es sei $\varphi :]a,b[\to U$ eine maximale Lösung eines n-dimensionalen autonomen Systems **x**'=F(**x**), wobei $n \in \mathbb{N}, a < b, U \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig sei. Dann gilt:

- Ist $b < \infty$, so gilt für jede kompakte Menge $K \subset U$ und alle $s \in]a,b[$:

$$\{\varphi(t) | s \leq t < b\} \not\subseteq K$$

- Analog: Ist $a > -\infty$, so gilt für jede kompakte Menge $K \subset U$ und alle $s \in]a,b[$:

$$\{\varphi(t) | a < t \leq s\} \not\subseteq K$$

Zurück zu unserem Fall: Weil φ nach Teil d) beschränkt ist, ist ihr Wertebereich $\{\varphi(t) | t \in]a,b[\}$ in einer kompakten Kreisscheibe K enthalten. Nach dem Satz von eben folgt: $a = -\infty$ und $b = \infty$, also die Behauptung.

Zu f):[4]

Zum Nachweis der Stabilität sei $\epsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von H (H ist ein Polynom) und wegen H(0,0) = 0 können wir $\delta > 0$ so klein wählen, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\|_2 \leq \delta$ gilt: $H(x,y) \leq \frac{3}{2}\epsilon^2$. Für alle solchen (x,y) und die maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(0) = (x,y)$ folgt mit Teilaufgabe d):

$$\{\varphi(t) | t \in \mathbb{R}\} \subseteq N_{H(\varphi(0))} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x,y)\|_2^2 \leq \frac{2}{3} H(\varphi(0))\}$$

$$\subseteq lbrace(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x,y)\|_2 \leq \epsilon\}$$

wie zu zeigen war. Zum Nachweis der Nichtattraktivität sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen irgendeine maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $0 < \|\varphi(0)\|_2 \leq \epsilon$; eine solche existiert nach dem Existenzsatz für maximale Lösungen, weil die rechte Seite des Systems lokal Lipschitz-stetig ist, und sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert wegen Teilaufgabe e). Dann gilt $H(\varphi(t)) = H(\varphi(0)) \not\to 0$ für $t \to \infty$ wegen $H(\varphi(0)) \geq \frac{3}{2}\|\varphi(0)\|_2^2 > 0$, also auch $\varphi(t) \not\to (0,0)$ für $t \to \infty$ wegen der Stetigkeit von H.

---

[3] Es gibt auch stärkere Varianten als die hier zitierte: Hier wird (unter Voraussetzungen) nur behauptet, dass die (einseitige) maximale Lösung nicht ganz in einem Kompaktum verläuft, nicht jedoch, dass sie schließlich irgendwann nicht mehr dorthin zurückkehrt. Für unsere Zwecke genügt diese schwache Variante.

[4] *Erinnerung:* Eine Ruhelage **x** heißt *stabil* (für $t \to \infty$), wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Lösungen $\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ mit $\|\varphi(0) - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$ und alle $t \geq 0$ gilt: $\|\varphi(t) - x\|_2 \leq \epsilon$. Die Ruhelage **x** heißt *attraktiv* (für $t \to \infty$), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Lösungen $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ mit $\|\varphi(t) - x\|_2 \leq \delta$ gilt:
$varphi(t) \to \mathbf{x}$ für $t \to \infty$