H17T1A1

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| + \Re e(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimme, ob A kompakt ist.

b) Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimme, ob die Funktionen $g(x, y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x, y))$ und $h(x, y) := e^{u(x,y)} \sin(v(x, y))$, für $x + iy \in \Omega$, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

Zu a):

$A := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| + \Re e(z) \leq 1\}$ ist abgeschlossen, denn $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z| + \Re e(z)$ ist als Komposition stetiger Abbildungen $|\cdot|$ und $\Re e|\cdot|$ stetig und $A = \varphi^{-1}(]-\infty, 1])$ ist abgeschlossen.
Für $z = x + 0 \cdot i$ mit $x \leq 0$ ist $|z| + \Re e(z) = |y| + y = 0 \leq 1$, also ist $\{z = x : x \leq 0\} \subseteq A$ und nicht beschränkt.
$\Rightarrow$ A ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt.

Zu b):

Wurzelkriterium (Formel von Cauchy-Hadamard)

$$L := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\right)^{5} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{5}$$

Es ist bekannt, dass $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ist, mit $z = -1$ gilt:

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{e}\right)^5 = \frac{1}{e^5} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{L} = e^5$$

Zu c):

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ sind C^1-Funktionen, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, also gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Zu zeigen: werden $\partial_x g = \partial_y h$ und $\partial_y g = -\partial_x h$ erfüllt oder nicht?

$$\partial_x g = \partial_x u e^u \cos(v) - e^u \sin(v) \partial_x v = e^u (\partial_x u \cos(v) + \partial_y u \sin(v))$$

$$\begin{aligned}
\partial_y h &= \partial_y u e^u \sin(v) + e^u \cos(v) \partial_y v = e^u (\partial_y u \sin(v) + \partial_x u \cos(v)) \\
\partial_y g &= \partial_y u e^u \cos(v) - e^u \sin(v) \partial_y v = e^u (-\partial_x v \cos(v) - \partial_y v \sin(v)) \\
\partial_x h &= \partial_x u e^u \sin(v) + e^u \cos(v) \partial_x v = e^u (\partial_y v \sin(v) + \partial_x v \cos(v))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ g und h erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.