Herbst 16 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Gegeben sei ein autonomes Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die $f(0) = 0$ erfüllt.

(i) Definieren Sie den Begriff der asymptotischen Stabilität der stationären Lösung 0 des Systems.

(ii) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der stationären Lösung 0 an, welches die totale Ableitung $Df(0)$ von f in 0 verwendet.

(b) Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung 0 des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + \sin x_2\\ \dot{x}_2 &= 2(1 - e^{x_1}) - 3x_2 + x_1 x_2^2\end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn sie Lyapunovstabil und attraktiv ist, d. h. wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| < \delta$ die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ zur Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ zumindest auf $[t_0, \infty)$ existiert und auf diesem Intervall die Abschätzung $\|x(t)\| < \varepsilon$, sowie $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ erfüllt.

(ii) Falls alle komplexen Eigenwerte der Jacobimatrix $Df(0)$ negativen Realteil haben, so ist die Ruhelage 0 asymptotisch stabil.

(b) Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(y, z) = (y^2 z + \sin z, 2(1 - e^y) - 3z + yz^2)^{\mathrm{T}}$, dann ist das zu untersuchende System von der Form $\dot{x} = f(x)$ mit einer C^1-Funktion f, die $f(0{,}0) = (0{,}0)$ erfüllt. Wir können also das Linearisierungskriterium benutzen.
Die Jacobimatrix von f ist durch $Df(y, z) = \begin{pmatrix} 2yz & y^2 + \cos z \\ -2e^y + z^2 & -3 + 2yz \end{pmatrix}$ gegeben und es gilt $Df(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist von der Form $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$, was genau die Nullstellen $\lambda = -1$ und $\lambda = -2$ besitzt. Jeder Eigenwert der Matrix hat daher negativen Realteil und die Ruhelage 0 ist asymptotisch stabil.

$\mathcal{J.F.B.}$