Herbst 16 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (t, x) \mapsto f(t, x)$, eine stetige Funktion, die bezüglich der Koordinate x Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = f(t, x)$$

genau dann autonom ist (d. h. $f(t, x)$ ist von t unabhängig), wenn mit jeder Lösung $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung und jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_\gamma :]a - \gamma, b - \gamma[\to \mathbb{R}^n, \varphi_\gamma(t) = \varphi(t + \gamma)$, eine Lösung ist.

Lösungsvorschlag:

Zunächst ist φ_γ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Falls das System autonom ist, handelt es sich wieder um eine Lösung, weil $\varphi'_\gamma(t) = \varphi'_\gamma(t+\gamma) = f(t+\gamma, \varphi(t+\gamma)) = f(t, \varphi_\gamma(t))$ für alle t im Lösungsintervall ist und damit die Gleichung erfüllt ist.
Sei jetzt für jede Lösung φ auch φ_γ eine Lösung. Um zu zeigen, dass f unabhängig von t ist müssen wir für alle $s, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(s, x) = f(t, x)$ zeigen. Seien dazu $s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest gewählt.
Die Strukturfunktion erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf, es gibt also zur Anfangsbedingung $\varphi(s) = x$ eine eindeutige Maximallösung auf einem Intervall $(s - \delta, s + \delta)$ mit $\delta > 0$. Sei jetzt $t \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $t = s - \gamma$ für $\gamma = s - t \in \mathbb{R}$. Per Voraussetzung ist φ_γ wieder eine Lösung auf dem Intervall $(s - \delta - \gamma, s + \delta - \gamma) = (t - \delta, t + \delta)$, wobei das Lösungsintervall den Punkt t enthält. Damit folgt wegen $s = t + \gamma$ nun $f(s, x) = f(s, \varphi(s)) = \varphi'(s) = \varphi'(t + \gamma) = \varphi'_\gamma(t) = f(t, \varphi_\gamma(t)) = f(t, \varphi(t + \gamma)) = f(t, \varphi(s)) = f(t, x)$, also $f(s, x) = f(t, x)$ für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. D. h. aber, dass f unabhängig von t ist und die Differentialgleichung ist daher autonom.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$