Herbst 16 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei
$$S := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \text{ Im } z < 6\pi\}$$
sowie
$$T := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \ : \ r > 0, -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}.$$
Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $\varphi : S \to T$ an mit
$$\lim_{\text{Re } z\to\infty} \varphi(z) = \infty.$$

Lösungsvorschlag:

Wir behaupten, dass $\varphi(z) = \exp(\frac{1}{12}(z - 3\pi i))$ die gewünschten Eigenschaften hat. Zunächst ist φ eine ganze Funktion und damit holomorph auf S, weiter sind S, T offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Wir zeigen, dass φ injektiv auf S ist, $\varphi(S) = T$ gilt und dass $\lim\limits_{\text{Re } z\to\infty} \varphi(z) = \infty$ ist.
Seien $v, w \in S$ mit $\varphi(v) = \varphi(w)$, dann ist mit der Polardarstellung
$$re^{i\phi} = \exp(\frac{1}{12}(v - w)) = 1,$$
also $r = 1$ und $\phi \in \pi\mathbb{Z}$. Wegen
$$1 = r = |\exp(\frac{1}{12}(v - w))| = \exp(\frac{1}{12}\text{Re } (v - w)),$$
folgt Re $(v - w) = 0$ und v, w haben den gleichen Realteil.
Insbesondere folgt daraus $\frac{1}{12}(v - w) \in i\mathbb{R}$ und, da der Imaginärteil dieser Zahl betragsmäßig durch $\frac{\pi}{2}$ beschränkt ist, er aber ein ganzzahliges Vielfaches von π sein muss, ist der Imaginärteil 0. Damit ist $\frac{1}{12}(v - w) = 0$ und ergo $v = w$. D. h. φ ist injektiv auf S.
Wir identifizieren jetzt $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mittels $\mathbb{C} \ni z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Für $z \in \mathbb{C}$ sind äquivalent $z \in S, \ z - 3\pi i \in \mathbb{R} \times (-3\pi, 3\pi)$ und $\frac{1}{12}(z - 3\pi i) \in \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
Für $z \in S$ ist also $\frac{1}{12}(z - 3\pi i) = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|y| < \frac{\pi}{4}$, weshalb $\varphi(z) = e^x e^{iy} \in T$ ist. Ist umgekehrt $re^{i\varphi} \in T$, so wählen wir $x + iy = \ln(r) + i\varphi$ und erhalten für $z = 12x + (12y + 3\pi)i \in S$ auch $\varphi(z) = re^{i\varphi}$. Daher ist $\varphi(S) = T$.
Es gilt $|\varphi(z)| = e^{\text{Re } \frac{z}{12}}$, was für Re $z \to \infty$ ebenfalls gegen ∞ divergiert. Dies ist äquivalent zu $\varphi(z) \to \infty$, womit auch die letzte Eigenschaft erfüllt und nachgewiesen ist.

$\mathcal{J.F.B.}$