Herbst 16 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

Lösungsvorschlag:

Sei f nicht konstant, wir zeigen, dass $g = 0$ ist. Weil f ganz aber nicht konstant ist, handelt es sich um eine offene Abbildung. Insbesondere ist $f(\mathbb{C})$ ein nichtleeres Gebiet. Wegen $g \circ f = 0$, ist $g(f(\mathbb{C})) = \{0\}$. Die Menge $f(\mathbb{C})$ besitzt nun aber Häufungspunkte in $\mathbb{C}$, z. B. den inneren Punkt $f(0)$. Damit häufen sich die Nullstellen von g in $\mathbb{C}$ und g ist eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet. Nach dem Identitätssatz ist g bereits konstant 0. Dies wollten wir zeigen. Ist f konstant, so ist die Aussage wahr, sonst muss $g = 0$ sein und die Aussage ist wieder wahr.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$