Herbst 16 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto |\cos(x)| + t^2$. Man zeige:

(a) Es gibt ein Intervall $]-\delta, \delta[$, auf dem das Anfangswertproblem $x' = f(t, x), x(0) = 0$ eine und nur eine Lösung besitzt.

(b) Ist $\alpha(t), t \in]a, b[$ mit $a < 0 < b$ eine Lösung des vorstehenden Anfangswertproblems, so ist $\tilde{\alpha}(s) := -\alpha(-s), s \in]-b, -a[$, ebenfalls eine Lösung.

(c) Sei $\alpha(t), -\infty \leq t^- < t < t^+ \leq +\infty$, die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

  (i) Es gilt $t^- = -t^+$. **Hinweis:** Man verwende (b).

  (ii) Es gilt $t^- = -\infty, t^+ = +\infty$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Funktion f ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen und lipschitzstetig bezüglich x, weil für alle $x, y, t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||\cos(x)| - |\cos(y)|| \leq |\cos(x) - \cos(y)| = |\sin(\xi)||x-y| \leq |x-y|$$

gilt, dabei wurden die umgekehrte Dreiecksungleichung und der Mittelwertsatz benutzt, um eine Zwischenstelle $\xi \in (x, y)$ zu finden.
Außerdem gilt $|f(t, x)| \leq 1 + t^2$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, weswegen das Wachstum der Lösung linear beschränkt bleibt.
Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall (c, d) mit $c < 0 < d$. Wählt man $\delta = \min\{|c|, |d|\}$, so folgt die Behauptung.

(b) Natürlich gilt $\tilde{\alpha}(0) = -\alpha(-0) = 0$ und $\tilde{\alpha}'(s) = -\alpha'(-s) \cdot (-1) = \alpha'(-s)$. Weil α eine Lösung sein soll, folgt aus der Achsensymmetrie von $\cos(z)$ und z^2

$$\alpha'(-s) = f(-s, \alpha(-s)) = |\cos(\alpha(-s))| + (-s)^2 = |\cos(-\alpha(-s))| + s^2 = f(s, \tilde{\alpha}(s))$$

und somit ist $\tilde{\alpha}(s)$ ebenfalls eine Lösung, die natürlich auf $]-b, -a[$ definiert ist.

(c) Wir haben bereits festgestellt, dass das Wachstum linear beschränkt bleibt und, dass die Strukturfunktion linear beschränkt bleibt. Folglich können wir auf globale Existenz schließen und erhalten insbesondere $t^- = -\infty = -(+\infty) = -t^+$.

$\mathcal{J.F.B.}$