Herbst 16 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei auf $\mathbb{R}^3$ das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} =: v\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und sei $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, t \in J$ dessen maximale Lösung.

(a) Man zeige: Die Funktionen

$$E_1(x,y,z) = x^2 - y^2 \text{ und } E_2(x,y,z) = y^2 - z^2$$

sind *erste Integrale* von v. (Ein Erstes Integral ist eine *Erhaltungsgröße*, also eine stetig differenzierbare Funktion E, deren Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet; d. h. $E'(x,y,z)v(x,y,z) = 0$. Ein Erstes Integral ist demnach auf Lösungskurven konstant.)

(b) Man zeige: Für t nahe 0 gilt $\alpha(t) = -\beta(t) = \gamma(t)$.
Hinweis: Es gilt $E_i(u(t)) = E_i(u(0))$ für alle $t, i = 1{,}2$.

(c) Man bestimme die Lösung $u(t)$ und das maximale Definitionsintervall J.

Lösungsvorschlag:

(a) Natürlich sind beide Funktionen stetig differenzierbar, da es sich um Polynome handelt, die sogar glatt sind. Wir berechnen $E_1'(x,y,z)v(x,y,z) = 2xyz - 2yzx + 0 = 0$ und $E_2'(x,y,z)v(x,y,z) = 0 + 2yzx - 2zxy = 0$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Weil die Strukturfunktion der Gleichung stetig ist, können wir mit dem Satz von Peano auf die Existenz einer Lösung schließen die nahe 0 definiert ist. Weil sogar eine glatte Strukturfunktion vorliegt, diese also lokal lipschitzstetig ist, folgt mit dem Satz von Picard-Lindelöf sogar die Eindeutigkeit der Maximallösung.
Nach dem Hinweis bzw. (a) gilt $\alpha(t)^2 - \beta(t)^2 = 0$, also $|\alpha(t)| = |\beta(t)|$ und $\beta(t)^2 - \gamma(t)^2 = 0$, also $|\beta(t)| = |\gamma(t)|$ für alle $t \in J$.
Weil die Lösung differenzierbar und damit insbesondere stetig sein muss, wechseln alle drei Funktionen α, β, γ nahe 0 ihr Vorzeichen nicht. Die Anfangsbedingung impliziert dann $\alpha(t), \gamma(t) > 0$ und $\beta(t) < 0$ in einer Umgebung von 0.
Damit folgt dann aus $|c| = |d| \iff c = \pm d$ die Aussage.

(c) Nahe 0 können wir mit dem Ansatz $u(t) = (\alpha(t), -\alpha(t), \alpha(t))^{\mathrm{T}}$ arbeiten, was auf das Anfangswertproblem $\alpha' = -\alpha^2,\ \alpha(0) = 1$ führt. Dessen Lösung können wir leicht erraten und sehen, dass die Lösung durch $\alpha(t) = \frac{1}{1+t}$ für $t \in (-1, \infty)$ gegeben ist.
Für $t \in J = (-1, \infty)$ definieren wir nun $u(t) = (1/(t+1), -1/(t+1), 1/(t+1))$ und stellen fest, dass diese Funktion unser Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}^3$ löst.

$\mathcal{J.F.B.}$