Herbst 16 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n = 1,2,\dots$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

(b) Für jedes $R > 0$ sei der geschlossene Weg $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (der also zuerst γ_1, dann γ_2 und zuletzt γ_3 durchläuft) definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, && x \in [0, R] \\ \gamma_2(\theta) &= Re^{i\theta}, && \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \gamma_3(t) &= -te^{i\pi/4}, && t \in [-R,0]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie das Wegintegral $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} \mathrm{d}z$ um zu zeigen, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\ \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\ \mathrm{d}x$$

gleich sind und den gemeinsamen Wert $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ haben.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und dass $\sin(u) \geq \frac{2u}{\pi}$ für alle $0 \leq u \leq \pi/2$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion beginnend bei $n = 0$ (die Formel gilt auch für $n = 0$).
Anfang: Für $n = 0$ handelt es sich bei dem Integranden um die konstante Einsfunktion und das Integral hat den Wert 2π, was mit dem Ausdruck auf der rechten Seite wegen $0! = 1$ übereinstimmt.
Annahme: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte die behauptete Formel.
Schritt ($n \mapsto n+1$): Wir integrieren partiell, indem wir einen Faktor abspalten und $\cos(\theta)$ integrieren, es folgt dann

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2(n+1)} \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n+1} \cos(\theta) \mathrm{d}\theta \\ = (\cos(\theta))^{2n+1} \sin(\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} &+ \int_0^{2\pi} (2n+1)(\cos(\theta))^{2n} (\sin(\theta))^2 \mathrm{d}\theta \\ = (2n+1) \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n} \mathrm{d}\theta &- (2n+1) \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n+2} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras $(\sin(\theta))^2 = 1 - (\cos(\theta))^2$. Addiert man zum ersten und letzten Term jeweils $(2n+1) \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n+2} \mathrm{d}\theta$, so folgt nach Verwendung der Induktionsannahme die Gleichung

$$(2n+2) \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2(n+1)} \mathrm{d}\theta = (2n+1) \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{\pi(2n+1)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

Anschließende Division von $2(n+1)$ führt auf $\int_0^{2\pi}(\cos(\theta))^{2(n+1)}\mathrm{d}\theta = \dfrac{\pi(2n+1)!}{2^{2n}(n!)(n+1)!}$.
Erweitern des Bruches mit $2n+2 = 2(n+1)$ führt schließlich zu

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\theta))^{2(n+1)}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(2n+1)!}{2^{2n}(n!)(n+1)!} = \frac{\pi(2n+2)!}{2^{2n+1}((n+1)!)^2} = \frac{\pi(2(n+1))!}{2^{2(n+1)-1}((n+1)!)^2}$$

womit der Beweis des Induktionsschrittes und folglich der ganze Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

(b) Wir überlegen zunächst, dass beide Integrale existieren und endlichen Wert haben, weil die Integranden auf dem kompakten Intervall [0,1] stetig sind, ist dies auf diesem Intervall klar und es genügt dies für $[1,\infty)$ zu zeigen. Dafür substituieren wir $t = x^2$ und erhalten $\int_1^\infty \cos(x^2)\ \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{2t}\ \mathrm{d}t$ und analog für sin. Dieses Integral existiert bekanntermaßen, um das einzusehen kann man auch partiell integrieren und zeigen, dass das so erhaltene Integral absolut konvergiert. Völlig analog geht man für sin vor und erhält Existenz und Endlichkeit beider Integrale.
Das zu betrachtende Wegintegral hat für alle $R > 0$ den Wert 0, weil die Kurve γ_R geschlossen und stückweise stetig ist und der Integrand holomorph auf dem Sterngebiet $\mathbb{C}$ ist (Cauchys Integralsatz).
Wir berechnen die Kurvenintegrale über die Teilwege direkt mit der Definition.

γ_1 : Es ist $\int_{\gamma_1} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^R \cos(t^2)+i\sin(t^2)\ \mathrm{d}t = \int_0^R \cos(t^2)\ \mathrm{d}t + i\int_0^R \sin(t^2)\ \mathrm{d}t$ wegen der Eulerformel. Für $R \to \infty$ konvergieren die Terme gegen die uneigentlichen Integrale, deren Wert wir bestimmen möchten, weil beide Integrale existieren.

γ_2 : Es ist $\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i2\theta}} iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iR\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin(2\theta)+i(R^2\cos(2\theta)+\theta)}\ \mathrm{d}\theta$. Unser Ziel ist es nicht, diesen Wert exakt auszurechnen, stattdessen werden wir zeigen, dass dieser für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Wir benutzen die Standardabschätzung und $|e^{s+ir}| = e^s$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und erhalten nach Anwendung der Ungleichung aus dem Hinweis (möglich, weil für $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ $2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt) somit

$$0 \le \left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin(2\theta)}\ \mathrm{d}\theta \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}\ \mathrm{d}\theta.$$

Dabei ist $-R^2 \le 0$ zu beachten. Das letzte Integral können wir bestimmen, es ist

$$R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}\ \mathrm{d}\theta = R\left[\frac{-\pi}{4R^2}e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{R}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}e^{-R^2}\right),$$

was für $R \to \infty$ gegen $0 \cdot \frac{\pi}{4} = 0$ konvergiert. Demnach konvergiert auch der Wert des Pfadintegrals nach dem Einschnürungssatz gegen 0, wenn R gegen ∞ divergiert.

γ_3 : Wir setzen wieder ein und erhalten $\int_{\gamma_3} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_{-R}^0 -e^{it^2i}e^{i\pi/4}\ \mathrm{d}t = -e^{i\pi/4}\int_{-R}^0 e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = -e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$, was man entweder durch Substitution $t = -s$ oder Argumentation über Symmetrie verifiziert. Für $R \to \infty$ konvergiert dies gegen $e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{\pi}(1+i)}{2\sqrt{2}}$.

Wir können nun alles zusammensetzen. Es gilt

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\ \mathrm{d}t + i\int_0^\infty \sin(t^2)\ \mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} e^{iz^2}\mathrm{d}z$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\ \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} e^{iz^2}\mathrm{d}z = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert nun wegen der Eindeutigkeit der Normaldarstellung komplexer Zahlen das gewünschte Resultat.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$