Herbst 16 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Jede überall partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und es gebe ein $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Dann ist f konstant.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Lösungsvorschlag:

(a) Diese Aussage ist falsch. Wir betrachten die Funktion mit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0{,}0)$ und $f(0{,}0) = 0$. Diese ist wohldefiniert, auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0{,}0)\}$ glatt als Verknüpfung glatter Funktionen, in $(0{,}0)$ unstetig, weil $f(1/n{,}1/n) = 1/2 \to 1/2 \neq 0 = f(0{,}0)$ und $(1/n{,}1/n) \to (0{,}0)$ für $n \to \infty$ gilt, aber in $(0{,}0)$ und damit auch überall partiell differenzierbar, weil

$$\partial_x f(0{,}0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h{,}0) - f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

und

$$\partial_y f(0{,}0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

existieren und die partiellen Ableitungen in $(0{,}0)$ damit auch existieren.

(b) Diese Aussage ist falsch. $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z$ ist holomorph. Für $z_0 = 0$ gilt $|f(0)| = 0 \leq |z| = |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, aber f ist wegen $f(1) = 1 \neq 0 = f(0)$ nicht konstant.

(c) Diese Aussage ist wahr. In $x \neq 0$ ist f offensichtlich differenzierbar, weil in einer Umgebung von z die Funktion als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen gegeben ist. Wir müssen nur $x_0 = 0$ gesondert untersuchen.
Für den linksseitigen Differentialquotienten gilt

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} 0 = 0$$

und für den rechtsseitigen erhalten wir

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} h \sin(1/h) = 0,$$

weil wir für $h > 0$ $|h \sin(1/h)| \leq |h| = h$ abschätzen können, was für $h \to 0$ ebenso gegen 0 konvergiert.

Die beidseitigen Differentialquotienten in 0 existieren und stimmen überein, also ist f auch in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$ und folglich ist f in jedem reellen Punkt differenzierbar.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$