Herbst 16 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Gegeben sei die Funktion $f(z) := z^2\overline{z},\ z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, für die die komplexe Ableitung $f'(z)$ existiert.

(b) Die Funktion $h(z) := \dfrac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(9z^2 + 12z + 4)}$ sei für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert, für die der Nenner nicht verschwindet. Bestimmen Sie für jede Singularität (in $\mathbb{C}$) den Typ. Ist $z = \infty$ eine Singularität von f? Falls ja, von welchem Typ?

(c) Sei D das Dreiecksgebiet in der komplexen Ebene, das durch die Punkte $0 + 0i, 1 + 0i$ und $1 + i$ aufgespannt wird. Sei weiter γ ein Weg, dessen Spur den Rand von D gegen den Uhrzeigersinn einmal durchläuft. Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma |z|^2 \mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Wir setzen $z = x+iy$ an, betrachten Real- und Imaginärteil von f und untersuchen, ob die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt sind. Dazu berechnen wir $g(x, y) := f(x+iy) = (x-iy)(x+iy)^2 = (x+iy)(x^2+y^2) = x^3+xy^2+i(yx^2+y^3) =: u(x, y) + iv(x, y)$ und halten fest, dass u und v glatte Funktionen sind.
Wir berechnen

$$\partial_x u(x, y) = 3x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} x^2 + 3y^2 = \partial_y v(x, y)$$

sowie

$$\partial_y u(x, y) = 2xy \stackrel{!}{=} -2xy = -\partial_x v(x, y).$$

f besitzt in $z = x+iy$ genau dann eine komplexe Ableitung, wenn beide Gleichungen erfüllt sind. Die letzte Gleichung lässt sich zu $4xy = 0$ umformen, was genau für $x = 0$ oder $y = 0$ erfüllt ist. Für $x = 0$ liefert die erste Gleichung $y^2 = 3y^2 \iff 2y^2 = 0 \iff y = 0$ und für $y = 0$ liefert die erste Gleichung $3x^2 = x^2 \iff 2x^2 = 0 \iff x = 0$.
Beide Gleichungen sind also genau für $z = 0 + 0i = 0$ erfüllt und der einzige Punkt in dem f eine komplexe Ableitung besitzt ist 0.

(b) Wir bestimmen zunächst die Nullstellen des Nenners, der erste Faktor verschwindet genau für $z_1 = 1$ und die Nullstellen des zweiten Faktors erhalten wir nach Faktorisierung $9z^2 + 12z + 4 = 9(z + \frac{2}{3})^2$ als $z_2 = -\frac{2}{3}$.
Setzt man diese Punkte in den Zähler ein, stellt man fest, dass dieser nicht verschwindet. Alle Singularitäten sind nämlich reell und für reelle z gilt $z^8 + z^4 + 2 \geq 2 > 0$. Weil z_1 eine dreifache Nullstelle des Nenners ist und der Zähler nicht verschwindet, handelt es sich hier um einen Pol dritter Ordnung. Analog ist z_2 als doppelte Nullstelle des Nenners bei nicht verschwindendem Zähler ein Pol zweiter Ordnung.
Auch $z = \infty$ ist eine Singularität von f. Weil das Zählerpolynom Grad 8 hat und das Nennerpolynom Grad 5 hat, handelt es sich bei ∞ um einen Pol dritter Ordnung.

(c) Wir wählen eine Parametrisierung von γ und teilen diesen dafür in drei Teilwege auf, die den Dreiecksseiten entsprechen. Anschließend berechnen wir das Wegintegral längs dieser Wege und addieren unsere Ergebnisse.
Wir wählen für die horizontale Dreiecksseite $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ und erhalten $\int_{\gamma_1} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.
Für die vertikale Seite parametrisieren wir $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1 + ti$ und erhalten $\int_{\gamma_2} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_0^1 |1 + ti|^2 i \mathrm{d}t = i \int_0^1 1 + t^2 \mathrm{d}t = [t + \frac{t^3}{3}]_0^1 i = \frac{4}{3} i$.
Zuletzt untersuchen wir die schräge Seite mittels $\gamma_3 : [-1,0] \to \mathbb{C}, t \mapsto -t(1+i)$ zu $\int_{\gamma_3} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_{-1}^0 2t^2(1+i)\mathrm{d}t = (1+i)[\frac{2t^3}{3}]_{-1}^0 = \frac{2}{3}(1+i)$.
Addieren wir alle Teilergebnisse, so erhalten wir als Endergebnis, dass $\int_\gamma |z|^2 \mathrm{d}z = 1 + 2i$ ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$