H16T1A5

Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$x' = -x^3 + 2x^2y - xy^2$$

$$y' = -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4$$

Bestimme alle Ruhelagen des Systems und untersuche diese auf Stabilität.

Lösung:

Um die Ruhelagen bestimmen zu können, müssen $x' = 0$ und $y' = 0$ gesetzt werden.

$$-x^3 + 2x^2y - xy^2 = 0 \tag{1}$$

$$-2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4 = 0 \tag{2}$$

Löse zunächst die Gleichung (1):

Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$-x^3 + 2x^2y - xy^2 = \Leftrightarrow -x(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow -x(x-y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = y$$

Für $x = 0$ liefert die Gleichung (2):

$$-y^3 + 2y^4 = 0 \quad \Rightarrow \text{Ruhelagen bei } (0,0) \text{ und } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Für $x = y$ liefert die Gleichung (2):

$$-2x^3 - x^3 + x^3 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow -2x^3(1-x)$$

$$\Rightarrow \text{Ruhelage bei } (0,0) \text{ und } (1,1)$$

Stabilitätsuntersuchung der Ruhelagen durch Linearisieren:

Bezeichne $f(x,y)$ die rechte Seite der Gleichungen, so ist

$$(Jf)(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 4xy - y^2 & 2x^2 - 2xy \\ -6x^2 + 2xy & -3y^2 + x^2 + 8y^3 \end{pmatrix}$$

die erste Ableitung (Jacobi-Matrix) von $f(x,y)$.

Für die Ruhelage $(0,0)$ ergibt $(Jf)(0,0)$ die Nullmatrix, somit kann man **keine Aussage** mit Hilfe der Linearisierung treffen.

Für die Ruhelage $(1,1)$ gilt:

$$(Jf)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f = \det \begin{pmatrix} -X & 0 \\ -4 & 6-X \end{pmatrix} = -X(6-X)$$

$\Rightarrow$ Daraus ergeben sich die Eigenwerte 0 und 6. Da ein Eigenwert mit Realteil > 0 existiert, ist die Ruhelage **instabil**.

Für die Ruhelage $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ gilt:

$$(Jf)\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - X & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} - X \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{4} - X\right)\left(\frac{1}{4} - X\right)$$

$\Rightarrow$ Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\pm\frac{1}{4}$, also ist die Ruhelage **instabil**.

Versuche nun die Lyapunovfunktion V zu finden, d.h. $\langle \text{grad } V, \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \rangle \leq 0$

$$\Rightarrow \; x\dot{x} = -x^4 + 2x^3y - x^2y^2 \quad \text{und} \quad y\dot{y} = -2x^3y - y^4 + x^2y^2 + 2y^5$$

$$\Rightarrow \; \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \rangle = -x^4 - y^4 + 2y^5 = -(x^4 + y^4(1-2y)) \leq 0$$

Da $x^4 \geq 0$ und $y^4 \geq 0$ ist die Ungleichung für $y \leq \frac{1}{2}$ erfüllt.
Definiere also $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow \; V : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ ist eine Lyapunovfunktion, da $V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$,

$V(x,y) \geq 0$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \backslash (0,0)$ und $\langle \text{grad } V, \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \rangle \leq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \backslash (0,0)$
$\Rightarrow$ 0 ist eine **stabile Ruhelage**.