Herbst 16 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos(y + x^3) \\ e^x \sin(y + x^3) \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass F beliebig oft differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix DF.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$\Omega := \left\{ F(x, y) \;\middle|\; 0 \le x \le y \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Als Verknüpfung glatter (sogar analytischer) Funktionen ist F selbst glatt (analytisch) also beliebig oft differenzierbar.

(b) Für alle $(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ ist $JF(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(\cos(y + x^3) - 3x^2 \sin(y + x^3)) & -e^x \sin(y + x^3) \\ e^x(\sin(y + x^3) + 3x^2 \cos(y + x^3)) & e^x \cos(y + x^3) \end{pmatrix}$.

(c) Den Flächeninhalt der Menge können wir berechnen, wenn wir die Determinante der Jacobimatrix kennen. Wir berechnen $\det(JF(x, y)) =$

$e^{2x}(\cos^2(y+x^3) - 3x^2 \cos(y+x^3) \sin(y+x^3) + \sin^2(y+x^3) + 3x^2 \cos(y+x^3) \sin(y+x^3))$

$= e^{2x}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Wir berechnen nun

$$A(\Omega) = \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 = \int_{\{(x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}} |\det(JF(x, y)|\, \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x, y)$$

mit dem Satz von Fubini-Tonelli als

$$\int_0^1 \int_0^y e^{2x} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^{2y} - 1) \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2y} - y\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$