Herbst 15 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei der Ellipsenrand $E \subset \mathbb{R}^2$ durch $(x, y) \in E \iff x^2 + 2y^2 = 2$ sowie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^3 - 3y^4$.
Begründen Sie, warum f sein Maximum und sein Minimum auf E annimmt. Bestimmen Sie sodann den maximalen sowie den minimalen Wert, den $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $(x, y) \in E$ annimmt und diejenigen Stellen, an denen das globale Maximum und das globale Minimum angenommen wird.

Lösungsvorschlag:

Die Menge E ist abgeschlossen als Urbild der 2 unter der stetigen Funktion $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$. Weiter gilt für $(x, y) \in E$ auch $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 = 2$, also ist E beschränkt. Als Teilmenge des endlich-dimensionalen $\mathbb{R}^2$ folgt die Kompaktheit von E und wegen der Stetigkeit von f werden Maximum und Minimum auf E angenommen.
Wir formen die Nebenbedingung um. Es ist $(x, y) \in E \iff y^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$, für $(x, y) \in E$ gilt also $f(x, y) = x^3 - 3(1 - \frac{x^2}{2})^2$. Wir können also die Funktion $g(x) = x^3 - 3 - \frac{3x^4}{4} + 3x^2$ betrachten. Für $(x, y) \in E$ gilt $0 \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + 2y^2} = \sqrt{2}$, also minimieren wir g auf $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Es ist $g'(x) = 3x^2 - 3x^3 + 6x = 3x(x - x^2 + 2) = 3x(x + 1)(2 - x)$, mit den Nullstellen 0, -1 und 2. Davon liegen nur 0 und -1 im relevanten Intervall. Die Funktion g ist stetig auf einem kompakten Intervall, muss also ein Maximum und ein Minimum besitzen. Diese müssen am Rand oder in den stationären Punkten 0 und -1 angenommen werden. Es ist $g(\pm\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}, g(0) = -3, g(-1) = -\frac{7}{4}$. Durch einen Vergleich der Funktionswerte sehen wir, dass bei 0 das globale Minimum und bei $\sqrt{2}$ das globale Maximum angenommen wird.
Aus $x^2 + 2y^2 = 2$ und $x = 0$ folgt $y = \pm 1$ und aus $x = \sqrt{2}$ folgt $y = 0$. Daher ist ($\sqrt{2}$,0) die einzige Maximalstelle mit Wert $2\sqrt{2}$, dies ist das Maximum von f auf E und $0, \pm 1)$ sind die beiden Minimalstellen von f auf E mit Wert -3. Andere Extremalstellen gibt es nicht.

$\mathcal{J.F.B.}$