**Herbst 15 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte:
$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$, hierbei bezeichne $f^{(n)}$ die $n$-te Ableitung von $f$, $f^{(0)} = f$.

b) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0, p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$. Zeigen Sie: $p$ ist ein Polynom vom Grad $n_0$.

c) $f$ erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil a). Zeigen Sie: $f$ ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

**Lösungsvorschlag:**

a) Wir unterscheiden die Fälle $\alpha \leq 0$ und $\alpha > 0$ :
$\alpha \leq 0$ : (Wir setzen hier $0^\alpha = \infty$ für negative $\alpha$ und $0^0 = 1$, damit die rechte Seite wohldefiniert ist). In diesem Fall ist $f$ beschränkt, denn für $|z| \geq 1$ ist $|f(z)| \leq M$ und auf der kompakten Menge $\overline{B_1(0)}$ ist $f$ stetig als holomorphe Funktion, also ebenfalls beschränkt. Nach dem Satz von Liouville muss $f \equiv c$ konstant sein. Für $\alpha < 0$ erhalten wir wegen $c = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ bereits $c = 0$, woraus trivialerweise $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Für $\alpha = 0$ ist $f$ konstant und die Ableitung erfüllt $f^{(1)} \equiv 0$. Natürlich folgt dann $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > 0$.
$\alpha > 0$ : Wir schätzen mit Cauchys Formel für höhere Ableitungen ab; es gilt:
$$|f^{(n)}(0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{n!}{2\pi}|\partial B_r(0)|\frac{Mr^\alpha}{r^{n+1}} = n!Mr^{\alpha-n} \text{ für } r > 0.$$
Hierbei bezeichnet $|\partial B_r(0)|$ die Länge der Parametrisierung $[0, 2\pi] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$. Der Grenzübergang $r \to \infty$ zeigt für $n > \alpha$ dann $0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq 0$, also $0 = f^{(n)}(0)$.

b) Wir entwickeln $p$ in eine Potenzreihe um 0. Es ist $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum\limits_{n=0}^{n_0} \frac{p^{(n)}(0)}{n!}z^n$, was ein Polynom vom Grad (höchstens) $n_0$ ist.

c) Nach dem Satz von Archimedes existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \alpha$. Die Aufgabenteile a) und b) zeigen dann, dass $f$ ein Polynom vom Höchstgrad $n_0$ ist. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt dann die Aussage.

$\mathcal{J.F.B.}$