Herbst 15 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f' = f(f-1)(f+1)$$

für eine reellwertige Funktion f in einer reellen Veränderlichen.

a) Zeigen Sie unter Nennung geeigneter Sätze, dass diese Differentialgleichung für jedes $f_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung f mit $f(0) = f_0$ besitzt.

b) Sei nun $f_0 < 1$. Zeigen Sie, dass für keine reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f existiert, so dass $f(t) = a$ gilt.

c) Sei $f_0 > 1$. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f mit $f(t) = a$ existiert.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion $(x \mapsto x(x-1)(x+1))$ ist ein Polynom und daher stetig differenzierbar und lokal lipschitzstetig. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das Anfangswertproblem für jeden Anfangswert im Definitionsbereich, hier $\mathbb{R}$, eindeutig maximal lösbar.

b) 1 ist eine Nullstelle der Strukturfunktion, also eine Ruhelage der Differentialgleichung. Wenn es ein solches a gäbe, so würde nach dem Zwischenwertsatz (man beachte: f ist differenzierbar, also stetig) ein $t_0 \in (0, t)$ bzw. $(t,0)$ existieren mit $f(t_0) = 1$. Dann würde f aber die Ruhelage 1 schneiden, was unmöglich ist (sonst gäbe es verschiedene Lösungen zur Anfangsbedingung $f(t) = 1$, nämlich f und 1).

c) Sei $I = (c, b)$ das maximale Lösungsintervall mit $-\infty \leq c < 0 < b \leq \infty$. Wir werden $\lim\limits_{t \to c+} f(t) = 1$ und $\lim\limits_{t \to b-} f(t) = \infty$ zeigen. Weil f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz dann wieder $a \in f((c, b))$. Völlig analog zu b) kann man beweisen, dass $f(t) > 1$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. Daraus folgt $f'(t) > 1 \cdot 0 \cdot 2 = 0$, also ist die Lösung streng monoton wachsend auf dem Lösungsintervall.
$\lim\limits_{t \to c+} f(t) = 1$: Die Funktion f ist monoton wachsend und nach unten beschränkt, der Grenzwert existiert also in $[1, \infty)$. Wir müssen nur zeigen, dass er 1 ist. Angenommen der Limes wäre $l > 1$, dann würde auch $f'(t) > (l+1)l(l+2) > l^3 > 0$ auf (c, b) sein. Aus dem Randverhalten maximaler Lösungen folgt $c = -\infty$, weil $f(t) \in (1, f_0)$ für $t \in (c,0)$ gilt, also beschränkt bleibt und der Rand des Definitionsbereichs der Gleichung die leere Menge ist ($\partial\mathbb{R} = \emptyset$). Nun würde für $t < 0$ auch $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) \, \mathrm{d}s = f(0) - \int_t^0 f'(s) \, \mathrm{d}s \leq f(0) - \int_t^0 l^3 \, \mathrm{d}s = f(0) + l^3 t$ folgen, was für $t \to -\infty$ gegen $-\infty$ divergiert, ein Widerspruch zu $f(t) > 1$. Also kann der Limes nicht größer als 1 sein, sondern muss genau 1 sein.
$\lim\limits_{t \to b-} f(t) = \infty$: Falls $b = \infty$ ist, so kann man analog zu gerade vorgehen, um $f(t) > f(0) + l^3 t$ für $t \in (0, b)$ zu zeigen, damit wäre dann die Aussage bewiesen. Falls $b < \infty$ ist, folgt die Aussage aber direkt aus dem Randverhalten maximaler Lösungen und der Monotonie. Dann liegt nämlich endliche Entweichzeit vor, bei

einer global definierten Strukturfunktion, wobei die Lösung nach unten beschränkt ist (also keine Divergenz gegen $-\infty$). Wieder folgt die behauptete Aussage und damit ist alles gezeigt.
Man könnte sogar $b < \infty$ zeigen und eine obere Schranke angeben; das ist hier aber nicht nötig.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$