Herbst 15 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Geben Sie die Definitionen für die Begriffe "isolierte Singularität", "hebbare Singularität", "Polstelle" sowie "wesentliche Singularität" an.

b) Bestimmen Sie Lage und Art aller isolierten Singularitäten der Funktion $h : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) = \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right),$$

wobei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ den maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion bezeichnet. Achten Sie jeweils bei Ihrer Entscheidung über die Art der Singularitäten auf eine ausführliche Begründung!

Lösungsvorschlag:

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und es gebe ein $\varepsilon > 0$ sodass $f : B_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann heißt z_0 eine isolierte Singularität von f. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ existiert, nennt man die isolierte Singularität hebbar. Falls dieser Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ist, d. h. wenn für alle $C \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in (0,\varepsilon)$ existiert mit $0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > C$, so nennt man z_0 eine Polstelle. Wenn der Limes weder eigentlich noch uneigentlich existiert, d. h. wenn z_0 eine isolierte Singularität ist, die weder hebbar, noch eine Polstelle ist, so spricht man von einer wesentlichen Singularität.

b) Exponential- und Sinusfunktion sind ganze Funktionen und rationale Funktionen sind holomorph auf dem Komplement der Nullstellenmenge des Zählers. Die isolierten Singularitäten von h sind demnach genau die Zahlen 2 (erster Bruch), 0 und 1 (zweiter Bruch). Also ist $\mathcal{D} = \mathbb{C}\backslash\{0,1,2\}$. Wir werden zeigen, dass 2 eine Polstelle, 0 eine wesentliche Singularität und 1 eine hebbare Singularität ist.
Die Funktion $g : B_1(2) \to \mathbb{C}, z \mapsto z\exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right)$ ist stetig und erfüllt $g(2) = 2e^{\sin(\frac{1}{2})} > 2$, wir finden also ein $\delta > 0$ mit $|z-2| < \delta \implies |g(z)| > 2$ (ε-δ-Kriterium mit $\varepsilon = g(2) - 2 > 0$). Sei nun $C > 0$, dann ist $\frac{1}{C} > 0$ und $r = \min\{1, \frac{1}{C}\} > 0$. Es gilt für alle $z \in B_r(2)\backslash\{2\}$ die Ungleichung $|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-2|} > \frac{2}{\frac{1}{C}} = 2C > C$. Daher ist 2 eine Polstelle von f.
Wegen $z^2 - z = z(z-1)$ gilt für $\mathbb{C} \ni z \neq 0{,}1{,}2$ die Formel $f(z) = \frac{z}{z-2}\exp\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)$. Diese Funktion ist auf $\mathbb{C}\backslash\{0{,}2\}$ definiert und stetig, es gilt also $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = -\exp(\sin(1))$. Da der Grenzwert existiert, ist 1 eine hebbare Singularität.
Wir wollen zeigen, dass $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nicht existiert und geben dazu zwei verschiedene Nullfolgen an, deren Bilder gegen verschiedene Werte konvergieren. Wir benutzen dazu die Formel $\sin(x+iy) = \sin\cosh y + i\cos x \sinh y$ und die Darstellung $f(z) = \frac{z}{z-2}\exp(\sin(z^{-1}))$ für $z \in B_1(0)$. Wir betrachten die Folgen $z_n = \frac{1}{n}$ und $w_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+in}$, deren Konvergenz gegen 0 ist klar. Außerdem liegen alle Folgeglieder in $\mathbb{C}\backslash\{0{,}2\}$, da $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$ ist und $w_n \notin \mathbb{R}$ gilt. Aus Bequemlichkeit setzen wir $f(z_1) = -\exp(\sin(1))$ in Übereinstimmung mit der Hebbarkeit von 1 und der

Existenz von $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$. Für die weiteren Argumente ist dies nicht von Belang.
Es ist $\sin((z_n)^{-1}) = \sin(n) \in [-1{,}1]$, also $\exp(\sin((z_n)^{-1})) \in [e^{-1}, e]$. Außerdem ist $|z_n - 2| = 2 - \frac{1}{n} \geq 1$, demnach gilt $0 \leq |h(z_n)| \leq \frac{e}{n} \to 0$, für $n \to \infty$, weswegen $\lim\limits_{n\to\infty} h(z_n) = 0$ ist.
Für die Folge w_n gilt

$$|w_n - 2| \leq |w_n| + 2 = \frac{1}{|\frac{\pi}{2} + in|} + 2 \leq \frac{1}{n - \pi} + 2 \leq 3, \quad \text{für } n \geq 5.$$

Außerdem ist $\exp(\sin((w_n)^{-1})) = \exp(\sin(\frac{\pi}{2} + in)) = \exp(\cosh n)$. Es folgt $|h(w_n)| \geq \frac{1}{3}|w_n| \exp(\cosh n)) \geq \frac{\cosh n}{3(\frac{\pi}{2}+n)} > \frac{e^n}{3\pi+3n}$, für $n \geq 5$. Für $n \to \infty$ wird die Ungleichung erfüllt und der letzte Term divergiert gegen unendlich. Demnach kann $(h(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein, sonst wäre sie beschränkt, und der Limes $\lim\limits_{z\to 0} h(z)$ existiert nicht. Demnach ist 0 eine wesentliche Singularität.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$