Herbst 15 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-1+i\} \to \mathbb{C} \quad f(z) = \frac{z}{(z^2+z)(z+1-i)^2}.$$

$\gamma(r)$ bezeichne den Weg entlang der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ mit einem Umlauf in positiver Richtung. Bestimmen Sie für alle Werte $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1,\sqrt{2}\}$ den Wert des Integrales

$$W(r) := \int_{\gamma(r)} f(z)\mathrm{d}z\ .$$

Lösungsvorschlag:

Wir werden das Integral mithilfe des Residuensatzes berechnen. Dafür erklären wir zuerst, wieso dieser anwendbar ist, danach bestimmen wir die Residuen von f in den drei Singularitäten und zuletzt berechnen wir das Integral. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex, die Funktion f ist darauf holomorph, wenn man von den endlich vielen (drei) Singularitäten absieht. Parametrisiert man $\gamma(r) : [0,2\pi i] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ erkennt man, dass $\gamma(r)$ ein geschlossener, glatter Weg in $\mathbb{C}$ ist. Es gilt $\text{Spur}(\gamma(r)) = \partial B_r(0)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1,\sqrt{2}\}$. Die Singularitäten haben jeweils Betrag $|0| = 0, |-1| = 1, |-1+i| = \sqrt{2}$, für die betrachteten Werte von $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1,\sqrt{2}\}$ wird also keine Singularität berührt. Wir können also den Residuensatz anwenden.
Wir kürzen (möglich wegen $z \neq 0$) mit z und erhalten damit $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+1-i)^2}$ für alle z im Definitionsbereich von f. Aus dieser Darstellung ist erkennbar, dass 0 eine hebbare Singularität, -1 ein Pol erster Ordnung und $-1+i$ ein Pol zweiter Ordnung ist. Wir erhalten außerdem sofort $\text{Res}_f(0) = 0$. Weiter ist $\text{Res}_f(-1) = \lim\limits_{z\to -1} f(z)(z+1) = \frac{1}{(-i)^2} = -1$ und $\text{Res}_f(-1+i) = \lim\limits_{z\to -1+i}(f(z)(z+1-i)^2)' = \lim\limits_{z\to-1+i} -\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{1}{i^2} = 1$.
Wir unterscheiden drei Fälle. Für $0 < r < 1$ umkreist der Weg $\gamma(r)$ nur die Singularität 0 von f und zwar genau einmal. Nach dem Residuensatz ist in diesem Fall $W(r) = \text{Res}_f(0) = 0$.
Für $1 < r < \sqrt{2}$ umkreist der Weg $\gamma(r)$ die Singularitäten 0 und 1 von f und zwar beide genau einmal. Wieder ist mit dem Residuensatz $W(r) = -2\pi i$.
Für $r > \sqrt{2}$ werden alle Singularitäten genau einmal umwunden. Der Residuensatz liefert also $W(r) = 0$, weil sich die Residuen zu 0 summieren.
Es gilt also $W(r) = \begin{cases} -2\pi i, & \text{falls } 1 < r < \sqrt{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

$\mathcal{J.F.B.}$