Herbst 15 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Auf dem Gebiet
$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \pi\}$$
betrachten wir die meromorphe Funktion
$$f(z) := \frac{1}{(z + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos z}.$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f in Ω und geben Sie jeweils den Typ an.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Polstellen.

c) Hat die Funktion f eine Stammfunktion?

d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $f(z) + c\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Begründen Sie jeweils alle Antworten auf die Teilaufgaben.

Lösungsvorschlag:

a) Die Singularitäten von f sind genau die Nullstellen des Nenners. Weil der Zähler keine Nullstelle hat, ist jede Singularität ein Pol, dessen Ordnung mit der Vielfachheit der Nullstelle übereinstimmt. Mit $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ folgt
$$\cos(x+iy) = 0 \iff \cos x = 0, \sinh y = 0 \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, y = 0.$$
Dabei wurde verwendet, dass $x + iy = 0 \iff x = 0 = y$, der Kosinus Hyperbolicus keine reelle Nullstelle besitzt, weshalb $\cos x = 0$ sein muss und damit $\sin x = \pm 1$ und, dass 0 die einzige reelle Nullstelle des Sinus Hyperbolicus ist.
Demnach sind die Nullstellen gerade die (reellen) Zahlen $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = -1$ ist die Nullstelle sogar doppelt, da $z + \frac{\pi}{2} = 0 \iff z = -\frac{\pi}{2} = z_{-1}$, sonst sind die Nullstellen einfach. Die einzigen Nullstellen in Ω sind $z_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, z_+ ist ein Pol erster Ordnung und z_- ein Pol zweiter Ordnung.

b) Wir nutzen die Formel $\mathrm{Res}_{\frac{g}{h}}(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ für $g, h : B_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0 \neq h'(z_0), h(z_0) = 0$. Für z_+ ist dann $\mathrm{Res}_f(z_+) = \frac{1}{\cos(z_+) - 2z_+ \sin(z_+)} = -\frac{1}{\pi}$.
Für z_- berechnen wir das Residuum mit der Formel $\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} ((z - z_0)^2 f(z))'$.
Es gilt mit der Quotientenregel dann $\mathrm{Res}_f(z_-) = \lim\limits_{z \to z_-} \frac{\cos(z) + (z - z_-)\sin(z)}{\cos(z)^2}$, Zähler und Nenner sind holomorph auf $B_1(z_-)$ und haben eine doppelte Nullstelle bei z_-, wir können also den Limes mit l'Hospital ausrechnen (oder um z_- entwickeln, den Term $(z - z_-)^2$ ausklammern und kürzen, mit demselben Ergebnis). Es gilt daher $\mathrm{Res}_f(z_-) = \lim\limits_{z \to z_-} \frac{(\cos(z) + (z - z_-)\sin(z))^{(2)}}{(\cos(z)^2)^{(2)}} = \lim\limits_{z \to z_-} \frac{-(z - z_-)\sin(z) + \cos(z)}{2\cos(z)^2 - 2\sin(z)^2} = \frac{0}{-2} = 0$, wobei im vorletzten Schritt die Stetigkeit der auftretenden Funktionen genutzt wurde.

c) Nein, f besitzt keine Stammfunktion, sonst würde nämlich das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwinden. Mit dem Residuensatz erhalten wir aber für den Weg $\gamma : [0, 2\pi], t \mapsto z_+ + \frac{1}{2}e^{it}$, der sich einmal positiv um z_+ und sonst um keine Singularitäten windet, dass $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = -2i$. Dabei durfte der Residuensatz angewendet werden, weil f auf der konvexen, offenen Menge $B_1(z_+)$ nur die Singularität z_+ besitzt und sonst holomorph ist und der Weg γ glatt und geschlossen ist, völlig in $B_1(z_+)$ verläuft, aber z_+ nicht auf der Spur liegt.

d) Wir wählen $c = \frac{1}{\pi}$, dann gilt $\operatorname{Res}_{\frac{c}{z-\frac{\pi}{2}}}(z_+) = \lim_{z \to z_+} c = \frac{1}{\pi}$ und folglich gilt (wegen $\operatorname{Res}_{f+g}(z_0) = \operatorname{Res}_f(z_0) + \operatorname{Res}_g(z_0)$), dass die Funktion $f(z) + c\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}$ holomorph auf der offenen, konvexen Menge Ω ist mit Ausnahme der beiden Singularitäten $z_\pm$. Die Residuen beider Singularitäten sind 0 und nach dem Residuensatz verschwindet das Pfadintegral über jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg in $\Omega \backslash \{z_+, z_-\}$. Dies ist äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$