Herbst 15 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = e^{2x}.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie mit einem geeigneten Ansatz eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie damit die allgemeine Lösung an.

c) Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2$, das die einfache Nullstelle 0 und die doppelte Nullstelle 1 besitzt. Aus der allgemeinen Theorie ist bekannt, dass $(1, e^x, xe^x)$ ein Fundamentalsystem ist. Man kann auch direkt nachrechnen, dass alle drei Funktionen Lösungen sind und zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

b) Wir machen den Ansatz $y(x) = ce^{2x}$ für $c \in \mathbb{R}$, leiten ab und setzen in die Gleichung ein. Dies führt auf $e^{2x} = y''' - 2y'' + y' = (8c - 8c + 2c)e^{2x}$ und auf $c = \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist $y(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ eine Lösung.

c) Die allgemeine Lösung hat die Form $\frac{e^{2x}}{2} + a + be^x + cxe^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aus $0 = y(0) = \frac{1}{2} + a + b, 0 = y'(0) = 1 + b + c$ und $0 = y''(0) = 2 + b + 2c$ folgt $-1 = c, b = 0$ und $a = -\frac{1}{2}$. Die gesuchte Lösung ist also $y(x) = \frac{e^{2x-1}}{2} - xe^x$. Man kann leicht nachrechnen, dass dies tatsächlich die Lösung des Problems ist.

$\mathcal{J.F.B.}$