Herbst 15 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : & D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y < 0\} \cup \{(0{,}0)\} \to \mathbb{R}, \\ & f(x,y) := (y+1)e^x - e^y \end{aligned}$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte oder Randpunkte von D sind. Ist D offen oder abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie Gradienten und Hessematrix von f in allen inneren Punkten von D.

c) Welcher Punkt im Innern von D ist eine lokale Extremalstelle von f und von welchem Typ ist er? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher Randpunkt ist eine lokale Extremalstelle von f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

a) Die inneren Punkte von D sind die Punkte in $(-\infty,0)^2$. Diese Menge ist offensichtlich eine offene Teilmenge von D, besteht also nur aus inneren Punkten von D. Wir zeigen, dass alle anderen Elemente von D keine inneren Punkte sind. Alle Punkte in $D \backslash (-\infty,0)^2$ sind von der Form $(0,y)$ für ein $y \leq 0$, für $\varepsilon > 0$ liegt $(\frac{\varepsilon}{2}, y)$ zwar in einer ε-Kugel um $(0,y)$ aber nicht in D, weil der erste Eintrag strikt positiv ist, damit sind das keine inneren Punkte. Wir bestimmen als nächstes den Abschluss von D und behaupten, dass dieser durch $(-\infty,0]^2$ gegeben ist. Diese Menge ist offensichtlich eine abgeschlossene Obermenge von D also Obermenge des Abschlusses. Jeder Punkt in D liegt natürlich auch im Abschluss, weshalb wir nur noch zeigen müssen, dass die Punkte $(x,0)$ für $x < 0$ im Abschluss liegen. Wegen $(x, -\frac{1}{n}) \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x, -\frac{1}{n}) = (x,0)$ ist dies aber der Fall und die Behauptung ist bewiesen. Der Rand ist nun das Komplement von Abschluss und Innerem, also die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x = 0 \text{ oder } y = 0\}$. Weil weder das Innere noch der Abschluss von D mit D übereinstimmen (betrachte $(-1{,}0)$ und $(0,-1)$) ist D weder offen noch abgeschlossen.

b) Es ist $\nabla f(x,y) = ((y+1)e^x, e^x - e^y)^{\mathrm{T}}$ und $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (y+1)e^x & e^x \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}$ für alle $(x,y) \in D^\circ$.

c) Wir bestimmen Nullstellen des Gradienten. Damit die zweite Komponente verschwindet, muss $e^x = e^y$, also $x = y$ gelten, da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ injektiv ist. Damit dann die erste Komponente verschwindet, muss $(x+1)e^x = 0$, also $x = -1$ sein, weil $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Der einzige stationäre Punkt ist also $(-1,-1)^{\mathrm{T}}$, alle anderen Punkte im Inneren sind keine Extremalstellen.

Für die Hessematrix gilt $Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-1} \\ e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$, eine (2×2)-Matrix mit negativer Determinante, also mit einem negativen und einem positiven Eigenwert. Die

Hessematrix ist indefinit und der stationäre Punkt folglich keine Extremalstelle. Es gibt also keine solchen Punkte.

d) Die in D enthaltenen Randpunkte sind die Punkte $(0, y)$ mit $y \leq 0$. Für jeden dieser Punkte gilt $f(0, y) = y + 1 - e^y$, deshalb betrachten wir zunächst die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = y + 1 - e^y$ und bestimmen die Ableitung $g'(y) = 1 - e^y$. Für $y \leq 0$ gilt $g'(y) \geq 0$ mit Gleichheit genau für $y = 0$. Außerdem ist $g'(y) \leq 0$ für $y \geq 0$ wieder mit Gleichheit genau für $y = 0$. Also wächst g streng monoton auf $(-\infty, 0]$ und fällt streng monoton auf $[0, \infty)$, weshalb bei $y = 0$ ein globales Maximum vorliegt. Es kann keine lokale Extremalstelle von f von der Form $(0, y)$ mit $y < 0$ geben, weil für jeden dieser Punkte und alle $0 < \varepsilon < |y|$ die Ungleichungen $f(0, y - \varepsilon) < f(0, y) < f(0, y + \varepsilon)$ gelten. Wir betrachten abschließend den Punkt (0,0) mit $f(0{,}0) = 0$, der kein lokales Minimum sein kann, weil für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $f(0, -\varepsilon) < f(0{,}0) = 0$ gilt. Er ist aber ein lokales Maximum. Für $-1 < y < 0$ und $x \leq 0$ gilt $f(x, y) \leq (y + 1)e^0 - e^y = e^0 + e^0(y - 0) - e^y \leq 0$, weil exp eine konvexe Funktion ist und die ersten Terme die Tangente an den Graphen in $y = 0$ bezeichnen. Daher ist (0,0) lokal maximal, weil für $(x, y) \in D$ mit $|(x, y)| < 1$ auch $-1 < y < 0$ gilt.
Es war zwar nicht gefordert, wir beweisen aber noch, dass das lokale Maximum ein globales Maximum ist. Für $y > -1$ ist $f(x, y) \leq 0$ schon bewiesen. Für $y \leq -1$ und $(x, y) \in D$ ist $f(x, y) = (y + 1)e^x - e^y$ negativ, weil $y + 1 \leq 0$ und $e^x, e^y > 0$ ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$