Herbst 15 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2c\dot{y}(t) + y(t) = 0 \tag{2}$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

a) Zeigen Sie, dass in allen drei Fällen $c^2 - 1 > 0, c^2 - 1 = 0$ und $c^2 - 1 < 0$ die Differentialgleichung asymptotisch stabil ist.

b) Sei $y(t)$ Lösung von (2) zum Anfangswert $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, t_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

c) Bestimmen Sie im Fall $c^2 - 1 < 0$ die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

Hierbei ist die Abkürzung $a := \sqrt{1 - c^2}$ nützlich.

Lösungsvorschlag:

a) Wir formulieren diese lineare Gleichung in ein äquivalentes System erster Ordnung um und suchen eine Lösung der Differentialgleichung $x' = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2c \end{pmatrix}$.
Das zugehörige charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 2c\lambda + 1$ mit Nullstellen $\lambda_\pm = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}$.
Falls $c^2 - 1 > 0$ gilt, so ist $\sqrt{c^2 - 1} < c$ und daher jeder Eigenwert negativ. Wir folgern asymptotische Stabilität nach der Theorie linearer Systeme.
Wenn $c^2 - 1 = 0$ ist, folgt $c = \pm 1$ und aus $c > 0$ schon $c = 1$. Die Matrix besitzt nun nur den Eigenwert -1 mit doppelter Vielfachheit. Wieder ist jeder Eigenwert negativ und es folgt asymptotische Stabilität.
Ist $c^2 - 1 < 0$, so gibt es keine reellen Eigenwerte, sondern ein konjugiertes Paar komplexer Eigenwerte. Deren Realteil ist $-c < 0$ und wieder folgt die asymptotische Stabilität.

b) Die einzige Ruhelage des Systems ist die 0. Weil in jedem Fall alle Eigenwerte negativen Realteil haben, konvergiert jede Lösung in den Ursprung nach der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungssysteme. Der gesuchte Limes ist also selbst 0.

c) Mit der angegebenen Abkürzung sind die Eigenwerte der Matrix durch $-c \pm ia$ gegeben, wir erhalten als Lösungsansatz die Funktion $y : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-ct}(b\cos(at) + d\sin(at))$ und müssen geeignete $b, d \in \mathbb{R}$ bestimmen. Tatsächlich ist für alle $b, d \in \mathbb{R}$ y eine Lösung, wir folgern aus den Anfangsbedingungen $b = 0$ und $ad - bc = 1$, also $d = \frac{1}{a}$. Man kann direkt nachrechnen, dass $y(t) = \frac{e^{-ct}\sin(at)}{a}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist, wobei noch $a \neq 0 \neq c \implies ac \neq 0$ beachtet werden solle.

$\mathcal{J.F.B.}$