Herbst 15 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $\mathbb{D}$ die offene komplexe Einheitskreisscheibe. Darüber hinaus seien f und g auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktionen, die keine Nullstelle in $\mathbb{D}$ besitzen. Zeigen Sie: Gilt $|f| = |g|$ auf $\partial\mathbb{D}$, so gibt es eine Konstante c mit $|c| = 1$, so dass $f = cg$ auf $\overline{\mathbb{D}}$.
Hinweis: Man nehme zunächst an, dass auch auf $\partial\mathbb{D}$ keine Nullstellen von g liegen.

Lösungsvorschlag:

Wir halten fest, dass wegen $|f| = |g|$ auf $\partial\mathbb{D}$ und $|z| = 0 \iff z = 0$ die Nullstellenmengen von f und g übereinstimmen. Außerdem nehmen wir gemäß des Hinweises an, dass auf der Einheitskreislinie keine Nullstellen von g und folglich auch keine von f liegen. Wir können daher die Funktion $h : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ betrachten, die holomorph auf $\mathbb{D}$, stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ (weil holomorphe Funktionen stetig sind und beide Funktionen auf eine offene Umgebung fortgesetzt werden können) und nullstellenfrei auf dem Kompaktum $\overline{\mathbb{D}}$ ist (weil $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ gilt).
Nach dem Maximumsprinzip (oder dem Minimumsprinzip) muss h auf $\mathbb{D}$ konstant sein, weil jeder Punkt im Gebiet $\mathbb{D}$ ein lokales Maximum und Minimum von $|h|$ ist. Wegen $|h(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ muss also $h|_{\mathbb{D}} \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ sein. Nun besitzt h eine holomorphe Fortsetzung auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, wir behaupten, dass diese Obermenge zusammenhängend gewählt werden kann. Für jeden Randpunkt $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass h eine holomorphe Fortsetzung auf die Kugel $B_{\varepsilon_0}(z_0)$ besitzt. Weil der Rand eine kompakte Teilmenge ist, finden wir endlich viele Randpunkte $z_1, \dots, z_n$, so dass die zugehörigen Kreisscheiben mit Radius $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ den gesamten Rand überdecken. Die Vereinigung aus diesen zusammen mit $\mathbb{D}$ ist ein Gebiet. Die Offenheit ist klar und um Zusammenhang zu zeigen, geht man induktiv vor und verwendet, dass die Vereinigung zweier Gebiete, die sich nichttrivial schneiden wieder ein Gebiet ist. Daher ist $G_1 := \mathbb{D} \cup B_{\varepsilon_1}(z_1)$ ein Gebiet ($(1 - \frac{\varepsilon_1}{2})z_1$ liegt im Schnitt) und analog ist auch $G_i := G_{i-1} \cup B_{\varepsilon_i}(z_i)$ ein Gebiet für $2 \leq i \leq n$, das Gebiet G_n hat dann die gewünschten Eigenschaften.
Wir betrachten also die holomorphe Fortsetzung von h auf G_n, diese ist eindeutig bestimmt als die konstante Funktion c. Es handelt sich nämlich um eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet, die auf der Menge $\mathbb{D}$ mit h übereinstimmt und $\mathbb{D}$ häuft sich in 0. Daher gilt $h \equiv c$ auch auf $\overline{\mathbb{D}} \subset G_n$ und Multiplikation mit $g(z) \neq 0$ liefert jeweils $f(z) = cg(z)$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$.
Jetzt betrachten wir den Fall, dass g Nullstellen am Rand hat. Falls es unendlich viele verschiedene gibt, so werden sich diese in einem Randpunkt häufen, weil dieser kompakt ist. Wie zuvor finden wir sogar eine holomorphe Fortsetzung von f und g auf ein Gebiet und erhalten wegen des Eindeutigkeitssatzes, dass $f \equiv 0 \equiv g$ gilt und wir $c = 1$ (oder eine andere normierte komplexe Zahl) wählen können.
Zuletzt betrachten wir den Fall, dass es endlich viele Nullstellen gibt. Wir zeigen, dass die Ordnung von f und g in jeder Nullstelle identisch ist. Hat g eine Nullstelle z_0 am Rand von n-ter Ordnung, dann ist die Funktion $z \mapsto \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ auf einer Menge $B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ für ein $r > 0$ definiert und holomorph in z_0 fortsetzbar, sodass die Fortsetzung in z_0 keine Nullstelle hat. Wegen der Stetigkeit können wir nach eventueller Verkleinerung von r erzielen, dass die Fortsetzung nullstellenfrei auf einem Kreis um

z_0 ist. Die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ ist ebenso holomorph auf einer punktierten Scheibe um z_0 und um z_0 beschränkt, weil

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\right| = \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^n} = \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^n} = \left|\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}\right|$$

gilt, was um z_0 beschränkt bleibt. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz ist die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ sogar holomorph fortsetzbar in z_0. Es folgt, dass die Nullstelle von f in z_0 zumindest von n-ter Ordnung ist. Wäre die Ordnung höher, so würde man eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Limes z_0 finden, sodass $\frac{|f(z_k)|}{|z_k-z_0|^n} = \frac{|g(z_k)|}{|z_k-z_0|^n}$ gegen 0 gehen würde, was wir aber ausgeschlossen hatten. Es folgt, dass die Nullstellen von f und g die gleiche Ordnung haben.
Wir schließen nun die Aufgabe ab. Seien f, g Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften und Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ auf dem Rand von $\mathbb{D}$ jeweils mit Ordnung $k_1, \ldots, k_n$. Wir betrachten die Funktion $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \prod_{i=1}^{n}(z-z_i)^{k_i}$. Sei U die offene Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ auf der die Fortsetzungen von f, g holomorph sind. Auf $U\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ betrachten wir die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{j(z)}$ und bezeichnen die holomorphe Fortsetzung davon auf U mit $\tilde{f}$. Völlig analog sei $\tilde{g}$ definiert. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann $|\tilde{f}(z_0)| = |\tilde{g}(z_0)|$ für alle Nullstellen auf dem Rand und die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ erfüllen alle Voraussetzungen aus dem ersten Teil der Aufgabe. Wir finden also ein normiertes $c \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} = c\tilde{g}$. Multiplikation mit $j(z)$ zeigt schließlich die Aussage. Man beachte, dass auch in den Nullstellen jeweils $f(z_0) = cg(z_0) = 0$ gilt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$