Herbst 14 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, so dass $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

Falls g die Nullfunktion ist, folgt auch $f \equiv 0$ und die Aussage ist für jedes $\lambda \in \overline{B_1(0)}$ trivial wahr. Sei g nicht konstant 0, dann besitzt die Nullstellenmenge nach dem Identitätssatz keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ und jede Nullstelle ist von endlicher Ordnung. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine k-fache Nullstelle von g, dann handelt es sich auch um eine k-fache Nullstelle von f. Dass es sich um eine Nullstelle handelt ist klar, für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n < k$ und $z \neq z_0$ gilt $0 \leq \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^n} \leq \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^n} \xrightarrow{z \to z_0} 0$, woraus die Behauptung folgt. Die Funktion $h := \frac{f}{g}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \backslash g^{-1}(0)$ und besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ (entwickle f und g um jede Nullstelle von g in Potenzreihen) und ist zudem betragsmäßig durch 1 beschränkt, nach Liouville also konstant $c \in \overline{B_1(0)}$. Daraus folgt $f = cg$ wie behauptet.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$