Herbst 14 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $1/f$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und um $z_0' = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - \frac{3}{2}| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Falls f eine p-fache Nullstelle bei z_0 hat, besitzt $1/f$ dort einen Pol p-ter Ordnung. Wir schreiben also $1/f(z) = \sum\limits_{j=-p}^{\infty} b_j (z - z_0)^j$ und aus dem Cauchy-Produkt

$$1 \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=p}^{p+k} a_m b_{k-m} \right) (z - z_0)^k = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \cdot \sum_{j=-p}^{\infty} b_j (z - z_0)^j$$

folgt $b_{-p} = 1/a_p$ und $b_j = \left(\sum\limits_{m=p+1}^{p+k} a_m b_{k-m} \right) / (-a_p)$ für $j > -p$.

b) Die Sinusfunktion besitzt einfache Nullstellen bei 0 und π. Es ist $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\sin(z) = \sin(z - \pi + \pi) = \sin(z - \pi)\cos(\pi) + \cos(z - \pi)\sin(\pi) = -\sin(z - \pi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Für den Hauptteil der Laurentreihe brauchen wir nur b_{-1}, für $z_0 = 0$ ergibt sich also $\frac{1}{z}$ als Hauptteil und für $z_0' = \pi$ erhalten wir $\frac{-1}{z-\pi}$ als Hauptteil.

c) Auf der offenen konvexen Menge $B_{\frac{21}{10}}(\frac{3}{2})$ ist der Integrand holomorph bis auf die beiden, demnach endlich vielen, Singularitäten 0 und π. Hier geht $\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$ und $\pi \approx 3{,}14, \pi \in (3, \frac{16}{5})$ ein. Die Kreislinie stellt einen geschlossenen, glatten Weg dar und verläuft durch keine Singularität des Integranden. Wir können also das Integral mit dem Residuensatz auswerten und erhalten den Wert durch $2\pi i(\operatorname{Res}_{\frac{1}{\sin(z)}}(0) + \operatorname{Res}_{\frac{1}{\sin(z)}}(\pi)) = 0$, weil wir die Residuen aus dem Hauptteil der Laurentreihen ablesen können und $\operatorname{Res}_{\frac{1}{\sin(z)}}(0) = 1$, $\operatorname{Res}_{\frac{1}{\sin(z)}}(\pi) = -1$ gilt, was sich zu 0 summiert.

$\mathcal{J.F.B.}$