Herbst 14 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Auf $\mathbb{R}^2$ sei die reellwertige Funktion $(x, y) \mapsto u(x, y) = (x - y)(x + y + 1)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$, so dass $f = u + iv$ holomorph ist und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

Lösungsvorschlag:

a) Natürlich ist u als Polynom zweimal (stetig) partiell differenzierbar. Es ist $u(x, y) = x^2 - y^2 + x - y$ und daher $\partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) = 2 - 2 = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Es ist $f = u + iv$ genau dann holomorph, wenn v zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind. Aus $\partial_x u(x, y) = 2x + 1 \overset{!}{=} \partial_y v(x, y)$ folgt $v(x, y) = (2x + 1)y + c(x)$ mit einer zweimal (stetig) differenzierbaren Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es ergibt sich $-\partial_y u(x, y) = 2y + 1 \overset{!}{=} 2y + c'(x) = \partial_x v(x, y)$, also $c(x) = x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Die gesuchten Funktionen sind demnach genau die Funktionen $v_c(x, y) = (2x+1)y + x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Es ist $u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 + 2xyi - y^2) + (x + iy) + i(x + iy) + ic = z^2 + (1 + i)z + ci$ mit $z = x + iy$, also $f_c(z) = z^2 + (1 + i)z + ic, c \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$