Herbst 14 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y, \\ y' &= ax + y - y^2, \end{aligned}$$

mit dem reellen Parameter $a < 0$.

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen des Systems.

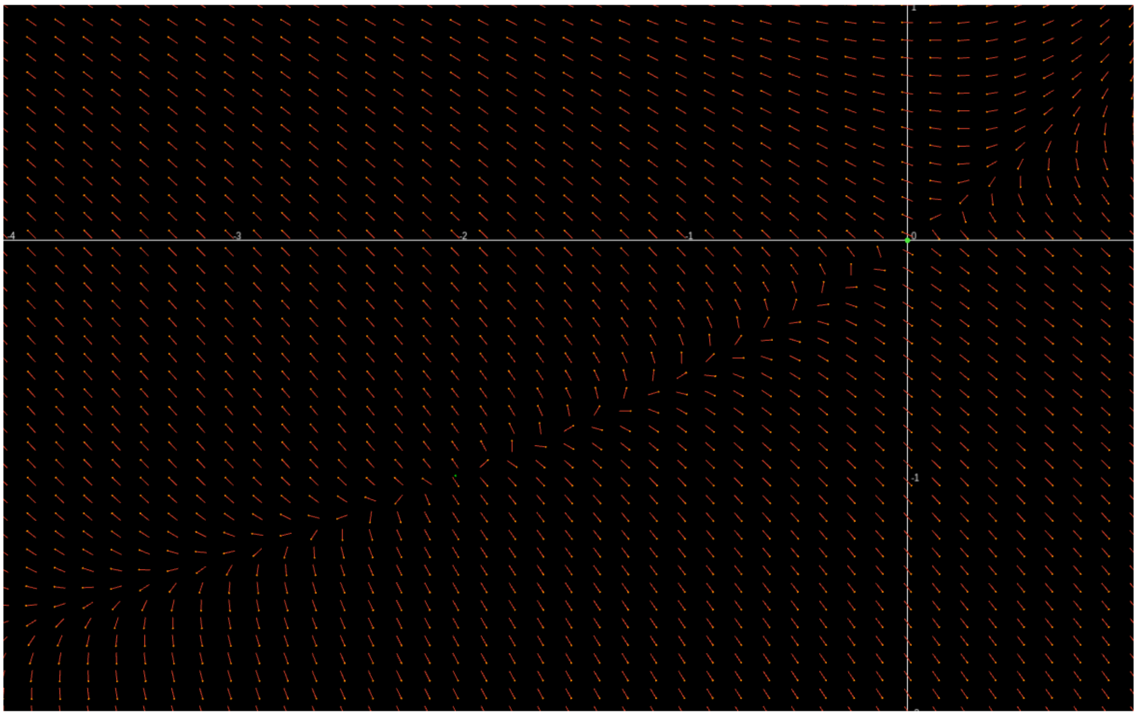
b) Untersuchen Sie alle Lösungen auf Stabilität in Abhängigkeit vom Parameter a.

c) Skizzieren Sie das Phasenportrait in der Nähe der konstanten Lösungen für den Fall $a = -1$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen die Nullstellen der Strukturfunktion. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2y$ und daher aus der zweiten $y(2a + 1 - y) = 0$, also $y = 0$ oder $y = 2a + 1$. Damit ergeben sich die Ruhelagen $(x, y) \equiv (0{,}0)$ und $(x, y) \equiv (4a + 2{,}2a + 1)$, die genau für $a = -\frac{1}{2}$ identisch sind.

b) Die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist $J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 1 - 2y \end{pmatrix}$, für $x = 0 = y$ erhalten wir $J(0{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $(1 - \lambda)^2 + 2a = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{-2a}$, wobei man $-2a > 0$ beachte. Demnach existiert immer ein Eigenwert mit positivem Realteil, nämlich $1 + \sqrt{-2a}$ und der Ursprung ist eine instabile Ruhelage.
Weiter ist $J(4a + 2, 2a + 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & -4a - 1 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $(1 - \lambda)(-4a - 1 - \lambda) + 2a = \lambda^2 + 4a\lambda - 2a - 1$ mit Nullstellen $\lambda_\pm = -2a \pm \sqrt{4a^2 + 2a + 1}$. Es ist $4a^2 + 2a + 1 = 3a^2 + (a + 1)^2 > 0$, die Eigenwerte sind also immer reell. In jedem Fall ist $\lambda_+ > -2a > 0$, also existiert immer ein Eigenwert mit positivem Realteil und wieder liegt Instabilität vor.

c) 

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$