Herbst 14 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, y) = e^t \sin y$ für alle $t, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f lokal lipschitzstetig bezüglich y ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t \sin(y(t)), \qquad t > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, wobei y die Lösung aus Aufgabenteil b) bezeichne.

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion ist stetig differenzierbar und daher nach dem Mittelwertsatz lokal lipschitzstetig. Genauer gilt

$$\begin{aligned} |f(t,y) - f(t,x)| = e^t|\sin(y) - \sin(x)| &= e^t \frac{|\sin(y) - \sin(x)|}{|y - x|}|y - x| \\ &= e^t|\cos(\xi)||y - x| \leq e^t|y - x|, \end{aligned}$$

wobei $\xi \in (x, y)$ eine Zwischenstelle ist und der Mittelwertsatz benutzt wird. Daraus folgt die lokale Lipschitzstetigkeit: Für jedes feste $t_0 \in \mathbb{R}$ und für alle $(t, x), (t, y) \in (t_0 - 1, t_0 + 1) \times \mathbb{R}$ gilt dann $|f(t, x) - f(t, y)| \leq e^{t_0+1}|x - y|$.

b) Die Existenz und Eindeutigkeit einer Maximallösung folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Wegen $|f(t, y)| \leq e^t$ bleibt das Wachstum linear beschränkt und die Lösung existiert global, hier also auf $[0, \infty)$.

c) Man sieht leicht, dass $y \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Angenommen es gäbe ein $t_0 \geq 0$ mit $y(t_0) \leq 0$, dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz (y ist differenzierbar, also auch stetig) ein $t_1 \geq 0$ mit $y(t_1) = 0$. Dann wären y und die Nullfunktion zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(t_1) = 0$, ein Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf. Die Annahme war daher falsch und die Behauptung korrekt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$