Herbst 2014 Thema 2 Aufgabe 5

mks

9. Mai 2025

a) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t,y) = e^t \sin(y)$ für alle $t, y \in \mathbb{R}$ Zeigen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t \sin(y(t)), \quad t > 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, wobei y die Lösung aus Aufgabenteil b) bezeichne.

Lösung:

a)

Es gilt $\partial_y f(t,y) = e^t \cos(y)$, was stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Nach einem bekannten Satz ist f somit lokal Lipschitz-stetig bezüglich y.

b)

Die Funktion f ist als Produkt stetiger Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Nach Teilaufgabe a) ist sie lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz existiert eine eindeutige, maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.
Mit einer bekannten Abschätzung für sin gilt $|e^t \sin(y)| = e^t |\sin(y)| \leq e^t |y|$. Also ist $f(t,y)$ linear beschränkt bezüglich y. Damit ist $I = \mathbb{R}$. Da $D = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ muss die eindeutige Lösung auf D dort mit der auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen, woraus die Aussage folgt.

c)

Für $y_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y_k(t) = k\pi$ gilt $y_k'(t) = (k\pi)'0 = e^t \sin(0) = e^t \sin(y(t))$. Damit sind die Funktionen y_k Lösungen der DGL aus b). Da f nach a) lokal Lipschitz-stetig ist, dürfen sich Lösungskurven nicht schneiden. Da $y(0) = 1$ muss also gelten $y_0(t) = 0 < y(t) < \pi = y_1(t)$, womit insbesondere die Aussage gezeigt ist.