Herbst 14 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y(t).$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für dieses Differentialgleichungssystem.

b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit dem Anfangswert

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Ist die Nulllösung für dieses Differentialgleichungssystem stabil?

Lösungsvorschlag:

a) Man könnte das Standardvorgehen nutzen und ein Matrixexponential berechnen, hier gibt es aber eine weitere Möglichkeit. Schreibt man $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, so ergibt sich $y_1'(t) = 0$, also $y_1 \equiv a, a \in \mathbb{R}$ und $y_3'(t) = -y_3(t)$, also $y_3(t) = ce^{-t}, c \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich dann $y_2'(t) = y_1(t) - y_3(t)$, durch Integration also $y_2(t) = at + ce^{-t} + b, b \in \mathbb{R}$.
Aus diesen Überlegungen leiten wir die drei Lösungen

$$y(t) = (1, t, 0), y(t) = (0, 1, 0), y(t) = (0, e^{-t}, e^{-t})$$

ab und behaupten, dass diese ein Fundamentalsystem bilden. Um das zu zeigen, müssen wir nur noch deren lineare Unabhängigkeit zeigen, wofür es genügt die Funktionen bei 0 auszuwerten und die lineare Unabhängigkeit der Bilder zu zeigen. Wir erhalten die Vektoren (1,0,0), (0,1,0) und $(0, 1, 1)$. Die ersten beiden Vektoren sind linear unabhängig als Teilmenge der Standardbasis. Ihr Spann enthält nur Vektoren deren letzter Eintrag 0 ist, der dritte Vektor liegt also nicht im Spann. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig und die Funktionen bilden ein Fundamentalsystem.

b) Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = (a, at + b + ce^{-t}, ce^{-t})$, die Anfangsbedingung impliziert $a = b = c = 1$.

c) Nein. Für $\varepsilon > 0$ haben die Vektoren $v_\varepsilon := (\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0)$ eine euklidische Norm von $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ und die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $y(0) = v_\varepsilon$ lautet $y(t) = (\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}t, 0)$, was für $t \to \infty$ unbeschränkt ist. Per Definitionem ist 0 instabil.

$\mathcal{J.F.B.}$