Herbst 14 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|h(z)| \leq 2$ für alle $|z| = 2$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = h(z)^3 + 4z^2 - z + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

a) Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) von f im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

b) Sei nun $h(z) = \frac{z}{2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir wenden den Satz von Rouché auf die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$ an. Für $z \in \mathrm{Spur}(\gamma)$ gilt

$$|4z^2| = 4|z|^2 = 16 > 11 = 2^3 + 2 + 1 \geq |h(z)|^3 + |z| + 1 \geq |h(z)^3 - z + 1|,$$

die Kurve ist geschlossen, glatt und zusammenziehbar und verläuft weder durch Pole noch Nullstellen von $z \mapsto 4z^2$ (Pole existieren nicht und die einzige Nullstelle ist 0). Der Satz ist also anwendbar und besagt, dass die Anzahl der Nullstellen von f und $z \mapsto 4z^2$ in $B_2(0)$ übereinstimmt. Wegen $4z^2 = 0 \iff z = 0$ ist 0 die einzige Nullstelle, und zwar eine doppelte, von $z \mapsto 4z^2$ in $\mathbb{C}$ und $B_2(0)$ und damit besitzt auch f genau zwei Nullstellen in der angegebenen Menge unter Beachtung der Vielfachheit.

b) Es gilt $|h(z)| = \frac{|z|}{2} \leq 1 \leq 2$ für $z \in \partial B_2(0)$, also ist a) anwendbar und wegen $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ gibt es höchstens zwei Nullstellen.
Wir wenden wieder den Satz von Rouché an, aber diesmal auf die Kurve $\Gamma : [0, 2\pi], t \mapsto e^{it}$. Wieder gilt

$$|4z^2| = 4|z|^2 = 4 > \frac{1}{8} + 2 \geq |h(z)|^3 + |z| + 1 \geq |h(z)^3 - z + 1|$$

für $z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)$. Nach dem Satz von Rouché (alle anderen Voraussetzungen werden wie in a) überprüft) besitzt f genau so viele Nullstellen in $B_1(0)$ wie $z \mapsto 4z^2$, also wieder genau 2. Damit liegt keine einzige Nullstelle von f im betrachteten Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$