Herbst 14 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie die Laurentreihen-Entwicklung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} + \frac{\sin(z)}{z^2}$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und deren Typ.

c) Berechnen Sie

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag:

a) Der erste Summand lässt sich mittels geometrischen Reihen und Cauchyprodukt oder mittels Partialbruchzerlegung in eine Potenzreihe entwickeln. Eleganter ist es aber mittels $(z-1)(z+1) = z^2 - 1 = -(1-z^2)$ direkt in eine geometrische Reihe zu entwickeln. Für $|z^2| < 1 \iff |z| < 1$ gilt nämlich

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} = -\frac{1}{1-z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{2n}.$$

Den zweiten Summanden können wir für $z \neq 0$ als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}(-1)^n$ schreiben.
Alles zusammen erhalten wir die Laurentreihe von f auf dem Gebiet durch

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+3)!}.$$

b) Die Singularitäten von f sind die Nullstellen der Nennerfunktionen in $\mathbb{C}$, also 0, 1 und -1. Aus der Laurentreihenentwicklung kann man sofort ablesen, dass 0 ein Pol erster Ordnung ist, mit Residuum 1. ± 1 sind ebenfalls Pole erster Ordnung, weil sie eine einfache Nullstelle des Nenners darstellen, der Zähler aber nicht verschwindet.

c) Wir verwenden den Residuensatz und bestimmen noch die Residuen in ± 1 mit der Formel für Pole erster Ordnung. Der zweite Summand ist holomorph in 1 und -1, weswegen wir nur das Residuum des ersten Summanden berechnen müssen. Die Ableitung des Nenners ist 2z, also ist $\operatorname{Res}_f(1) = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Res}_f(-1) = -\frac{1}{2}$.
Den Residuensatz können wir anwenden, weil f abgesehen von drei (endlich vielen) Singularitäten, holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\mathbb{C}$ ist und wir die Integrationsmenge mittels der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1 + \frac{3}{2}e^{it}$ als Pfadintegral über einen geschlossenen, glatten Weg darstellen können, der keine Singularität berührt. 0 und 1 werden einmal positiv umrundet, -1 überhaupt nicht. Nach dem Residuensatz ist der Integralwert also $2\pi i(\frac{1}{2} + 1) = 3\pi i$.

$\mathcal{J.F.B.}$