Herbst 14 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

i) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0, f(1) = 1$. Dann gibt es ein $t \in (0,1)$ mit $f'(t) = 1$.

ii) Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

iii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

iv) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

v) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

vi) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

i) Wahr. Dies folgt aus dem Mittelwertsatz wegen $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$.

ii) Falsch. $A = \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen, $f(x,y) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, aber unbeschränkt, da $f(n,0) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt.

iii) Falsch. $U = \mathbb{R}$ ist offen und $f(x) = \cos(x)$ ist stetig differenzierbar und nicht konstant. Aber $f(U) = [-1,1]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

iv) Wahr. Dies folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung.

v) Falsch. So eine Funktion wäre beschränkt und daher nach dem Satz von Liouville konstant, also sicher nicht bijektiv.

vi) Falsch. Für $z = 0$ ist weder $f'(z)$ noch $\frac{1}{z}$ definiert. Selbst für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ kann dies aber nicht erfüllt sein, für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$ ist nämlich $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0$. Wäre nun $f'(z) = \frac{1}{z}$ für ein holomorphes f, so wäre $2\pi i = \int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$, weil γ geschlossen ist. Ein Widerspruch.

$\mathcal{J.F.B.}$