Herbst 2014 Thema 2 Aufgabe 1

mks

14. Mai 2025

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es ein $t \in (0, 1)$ mit $f'(t) = 1$.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

d) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

e) Es gibt eine bijektive, holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a)

Die Aussage ist wahr.

Die Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Deshalb $\exists t \in (0, 1)$ mit $f'(t) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$.

b)

Die Aussage ist falsch.
$\mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen, da $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^2 = \emptyset$ per Definition offen ist. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ ist linear und somit stetig. Offensichtlich ist f nicht beschränkt.

Bemerkung: Die Aussage stimmt für kompakte Mengen.

c)

Die Aussage ist falsch.
Die Funktion cos ist stetig differenzierbar und nicht konstant, aber $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Bemerkung: Für den reellen Satz von der offenen Abbildung muss die Funktion auch surjektiv sein.

d)

Die Aussage ist falsch.

Sei $U = B_1(0) \cup B_1(2)$. U ist als Vereinigung offener Kreisscheiben offen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} 0 & z \in B_1(0) \\ 1 & z \in B_1(3) \end{cases}$.
f ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten, also holomorph. Aber es gilt $f(U) = \{0, 1\}$, was nicht offen ist.

Bemerkung: Um den Satz von der offenen Abbildung anwenden zu können müsste U zusammenhängend sein.

e)

Die Aussage ist falsch.
Biholomorphe Funktionen sind insbesondere ganz. Funktionen $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sind beschränkt. Nach dem Satz von Liouville muss f also konstant sein. Damit kann f nicht bijektiv sein.

f)

Die Aussage ist falsch.
Angenommen, F wäre eine solche Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein stetig differenzierbarer, geschlossener Weg um $z = 0$. Nach dem HDI würde gelten $\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.Da γ geschlossen ist folgt daraus $\oint_\gamma \frac{1}{z} = 0$.
Gleichzeitig folgt aus dem Residuensatz aber $\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot n(\gamma, \frac{1}{z}) \neq 0$. Ein Widerspruch, also kann $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion haben.

Alernativ: Würde eine solche Stammfunktion F existieren, os wäre diese differenzierbar und insbesondere stetig. Stammfunktionen sind bis auf eine Konstante eindeutig.
Dort wo Log definiert ist gilt $\mathrm{Log}' = \frac{1}{z}$. Es gilt $\lim_{z\to 0} F(-1+iz) = \lim_{z\to 0} \mathrm{Log}(-1+iz) + c = i\pi + c$ und $\mathrm{Log}' = \frac{1}{z}$. Es gilt $\lim_{z\to 0} F(-1-iz) = \lim_{z\to 0} \mathrm{Log}(-1+iz) + c = -i\pi + c$. Ein solches F kann also nicht stetig auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und damit keine Stammfunktion sein.