Herbst 14 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\exp(1-x^2-y^2)\\ \dot{y} &= -x\exp(1-x^2-y^2).\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses System zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Orbits der Lösungen in konzentrischen Kreislinien (einschließlich Radius 0) um den Ursprung enthalten sind.

c) Zeigen Sie, dass jede nichtkonstante maximale Lösung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periodenlänge.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion ist stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig. Wegen der Translationsinvarianz autonomer Lösungen genügt es die Aussagen für die Lösungen zur Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig zu zeigen. Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert die Eindeutigkeit jeder Lösung, wir geben nun explizit die Lösung an. Wir transformieren (x_0, y_0) in Polarkoordinaten und schreiben $(x_0, y_0) = c(\sin(t_0), \cos(t_0))$ für ein $c \geq 0$ und ein $t_0 \in [0, 2\pi)$, für $(x_0, y_0) \neq$ (0,0) sind diese Werte eindeutig bestimmt. Dann ist

$$(x(t), y(t)) := \left(c\sin\left(e^{(1-c^2)}\left(t+\frac{t_0}{e^{1-c^2}}\right)\right), c\cos\left(e^{1-c^2}\left(t+\frac{t_0}{e^{1-c^2}}\right)\right)\right)$$

eine global definierte, differenzierbare Funktion mit $(x(0), y(0)) = (c\sin(t_0), c\cos(t_0)) = (x_0, y_0)$, $x(t)^2 + y(t)^2 = c^2$ und daher

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= e^{1-c^2}c\cos\left(e^{1-c^2}\left(t+\frac{t_0}{e^{1-c^2}}\right)\right) = y(t)\exp(1-x(t)^2-y(t)^2)\\ \dot{y}(t) &= -e^{1-c^2}c\sin\left(e^{1-c^2}\left(t+\frac{t_0}{e^{1-c^2}}\right)\right) = -x(t)\exp(1-x(t)^2-y(t)^2),\end{aligned}$$

es handelt sich also um die, auf $\mathbb{R}$ definierte, Maximallösung.

b) Es gilt $\|(x(t), y(t))\|_2 = c$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist die Lösung im Kreis um 0 mit Radius c enthalten.

c) Die Periode von $c\cos(at+b), c\sin(at+b)$ ist $\frac{2\pi}{a}$, hier erhalten wir also direkt die Periodizität der Lösung mit Periodenlänge $\frac{2\pi}{e^{1-c^2}}$.

$\mathcal{J.F.B.}$