Herbst 14 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $0 < a < 1$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$, ist über $\mathbb{R}$ integrierbar.

b) Es gilt
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$
Integrieren Sie dazu eine geeignete holomorphe Funktion über den Rand der Rechtecke mit den Ecken $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$.

Lösungsvorschlag:

a) Der Nenner der Funktion ist stets größer als 1, verschwindet also insbesondere nicht. Demnach ist die Funktion stetig und folglich lokal integrabel. Wir bestimmen eine Majorante mit endlichem Integral. Für $x \leq 0$ schätzen wir $g(x) \leq e^{ax}$ ab. Es ist $\lim\limits_{T\to-\infty} \int_T^0 e^{ax}dx = \lim\limits_{T\to-\infty} [\frac{e^{ax}}{a}]_T^0 = \frac{1}{a} < \infty$. Für $x \geq 0$ schätzen wir $g(x) \leq e^{(a-1)x}$ ab. Es ist $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T e^{(a-1)x}dx = \lim\limits_{T\to\infty} [\frac{e^{(a-1)x}}{a-1}]_0^T = \frac{1}{1-a} < \infty$. Damit besitzt g eine über $\mathbb{R}$ integrierbare Majorante und ist selbst über $\mathbb{R}$ integrierbar.

b) Wir betrachten die holomorphe Funktion $f : \{x+iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)\}\backslash\{i\pi\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$. Diese ist mit Ausnahme einer einzelnen Singularität $i\pi$ holomorph auf der konvexen offenen Menge $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Dabei wurde $\exp(z) = -1 \iff z = (2k+1)i\pi, k \in \mathbb{Z}$ benutzt. Wir betrachten für $R > 0$ den geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma_R := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ mit

$$\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t, \qquad \gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R+it,$$
$$\gamma_3 : [-R,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2\pi i - t, \qquad \gamma_4 : [0{,}2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto -R+(2\pi-t)i.$$

Dann umwindet jeder Weg γ_R die Singularität $i\pi$ von f genau einmal positiv. Nach dem Residuensatz folgt dann $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_f(i\pi) = -2\pi i e^{ai\pi}$.
Wir untersuchen jetzt die Integrale über die Teilwege genauer. Für γ_1 gilt $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^R g(t)dt$ und für γ_3 ist $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = -e^{a2\pi i}\int_{-R}^R g(t)dt$.
Für γ_2 und γ_4 schätzen wir den Beitrag zum Integral ab und zeigen, dass dieser im Limes verschwindet. Es gilt für $j = 2{,}4$ nämlich $\left|\int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi \max\limits_{z\in\mathrm{Spur}(\gamma_j)} |f(z)|$, wir bestimmen eine Obergrenze an $|f(z)|$. Es ist $|e^{\pm R+ti}| = e^{\pm R}$ und $|e^{a(\pm R+ti)}| = e^{\pm Ra}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Für $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_2)$ gilt daher $|f(z)| \leq \frac{e^{aR}}{e^R-1} = \frac{1}{e^{(1-a)R}-e^{-aR}}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert und für $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_4)$ gilt dagegen $|f(z)| \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}$, was für $R \to \infty$ wieder gegen 0 konvergiert.
Setzen wir alles zusammen so folgt $-2\pi i e^{a\pi i} = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = (1-e^{a2\pi i})\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$.
Umstellen liefert die Behauptung, denn $\frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{a2\pi i}} = -\pi\frac{2i}{e^{(-a\pi)i}-e^{(a\pi)i}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, wobei $\sin(a\pi) = -\sin(-a\pi)$ benutzt wurde.

$\mathcal{J.F.B.}$