Herbst 13 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

   i) Zeigen Sie, dass $\partial f(G) \subset f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet ∂A den Rand $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{C}$.)

   ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial f(G) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial f(G) \not\subset f(\partial G)$.

Lösungsvorschlag:

a) i) Sei $z \in \partial f(G) = \overline{f(G)} \setminus f(G)$, weil $f(G)$ nach dem Satz über die Gebietstreue offen ist. Hier wird verwendet, dass $f|_G$ nicht konstant ist, sonst wäre durch die Stetigkeit auch f konstant. Es gibt eine Folge $z_n \in G$ mit $f(z_n) \to z$ für $n \to \infty$. Weil G beschränkt ist, besitzt die beschränkte Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $w \in \overline{G}$ und wir finden eine Teilfolge z_{n_k} die für $k \to \infty$ gegen w konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $z = \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \lim\limits_{k \to \infty} f(z_{n_k}) = f(w)$. Falls $w \in G$ wäre, so wäre $z = f(w) \in f(G)$, ein Widerspruch zu $z \in \partial f(G)$. Also folgt $w \in \partial G$ und damit $z = f(w) \in f(\partial G)$.

   ii) Wir betrachten die Funktion $f(z) = \sin(z)$ auf dem beschränkten Gebiet $G = B_\pi(0)$. Dann ist $\pi \in \partial G$ und daher $0 = f(\pi) \in f(\partial G)$. Wegen $0 \in G$ und $f(G) = f(G)^\circ$ ist aber $0 = f(0) \notin \partial f(G)$, weil 0 im Inneren des Bildes liegt.

b) Wir betrachten $f(x + iy) = \cos(x^2 + y^2)$ auf dem Gebiet $B_{\sqrt{\pi}}(0)$. Natürlich ist f als Verkettung unendlich oft differenzierbarer Funktionen, selbst unendlich oft differenzierbar. Es gilt $f(0 + i0) = 1$ und $f(x + iy) \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, weshalb $1 \in \partial f(G)$ gilt. Der Rand von G ist $\partial G = \{x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy| = \sqrt{\pi}\}$. Für jedes $x + iy \in G$ gilt $0 \leq x^2 + y^2 = |x + iy|^2 = \pi$. Wegen $\cos(t) = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$ kann für $x + iy \in G$ daher $f(x + iy) = 0$ nur für $x^2 + y^2 = 0$, also für $x + iy = 0 + i0$ gelten. Damit gilt $f(z) \neq 1$ für alle $z \in \partial G$ und $1 \in \partial f(G) \setminus f(\partial G)$, da $0 + i0 \notin \partial G$.

J.F.B.