Herbst 13 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{a^2+x^2}$.

a) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ \mathrm{d}x < \infty$.

b) Beweisen Sie mithilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}e^{-a}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wegen $|\cos x| \leq 1$ für alle reellen x, können wir $|f(x)|$ nach oben gegen $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}$ abschätzen. Eine Stammfunktion der letzten Funktion ist $F(x) = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$, was für $x \to \pm\infty$ gegen $\pm\frac{\pi}{2a}$ konvergiert. Damit ist das Integral über $|f(x)|$ nach oben beschränkt (durch $\frac{\pi}{a}$), also endlich.

b) Wir betrachten die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{ia, -ia\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ und integrieren diese für $R > a > 0$ über das Rechteck mit den Ecken $-R, R, R + Ri, -R + Ri$, d. h. entlang des Weges $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ mit

$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t; \qquad \gamma_2 : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto R + it;$$
$$\gamma_3 : [-R, R] \to \mathbb{C}.t \mapsto iR - t; \qquad \gamma_4 : [-R,0] \to \mathbb{C}, t \mapsto -R - it.$$

Der so entstehenede Weg ist geschlossen, stückweise stetig differenzierbar und verläuft durch keine Singularität von g. Die einzige Singularität, die umkreist wird, ist ia, welche einmal positiv umrundet wird. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und g ist darauf, mit Ausnahme von zwei Singularitäten, holomorph. Damit ist der Residuensatz anwendbar und liefert $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\ \mathrm{Res}_g(ia)$. Bei ia handelt es sich um einen Pol erster Ordnung, daher erhalten wir $\mathrm{Res}_g(ia) = \frac{\exp(-a)}{2ia}$ und daraus $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}e^{-a}$.
Mit der Eulerformel folgt $\int_{\gamma_1} g(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$. Das zweite Integral ist immer 0, weil der Integrand ungerade ist und über ein gerades Intervall integriert wird. Weil nach a) das Integral von f über $\mathbb{R}$ existiert, konvergiert $\int_{\gamma_1} g(z)\mathrm{d}z$ für $R \to \infty$ also gegen das Integral, das wir berechnen wollen. Wir schätzen jetzt die Beiträge über die restlichen drei Teilwege ab, und zeigen, dass diese im Unendlichen verschwinden.
Die Länge des Weges γ_2 beträgt R. Für $t \in [0, R]$ gilt
$|g(\gamma_2(t))| \leq \frac{|\exp(iR-t)|}{|R+it|^2-a^2} = \frac{e^{-t}}{R^2-a^2+t^2} \leq \frac{1}{R^2-a^2}$. Nach der Standardabschätzung folgt dann $0 \leq |\int_{\gamma_2} g(z)\mathrm{d}z| \leq \frac{R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$. Genauso kann man auch für γ_4 vorgehen.
Die Kurvenlänge von γ_3 beträgt $2R$. Für $t \in [-R, R]$ gilt
$|g(\gamma_3(t))| \leq \frac{|\exp(-R-it)|}{|Ri-t|^2-a^2} = \frac{e^{-R}}{R^2-a^2+t^2} \leq \frac{e^{-R}}{R^2-a^2}$. Wie bei γ_1 folgt mit der Standardabschätzung $0 \leq |\int_{\gamma_3} g(z)\mathrm{d}z| \leq e^{-R}\frac{2R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

Deswegen folgt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} g(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}e^{-a}$.

$\mathcal{J.F.B.}$