Herbst 13 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A_a x$ mit der reellen 3×3-Matrix
>
> $$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$
>
> wobei a ein reeller Parameter ist. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die es eine nichttriviale Lösung $x(t)$ gibt mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

Lösungsvorschlag:

Die gesuchten a sind genau die Werte $a \in (-\infty,1)$. Wir unterscheiden einige Fälle:

$a < 0$: Die Funktion $x(t) = (0,0,e^{at})$ ist eine Lösung $\neq 0$ mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

$a = 0$: Die Funktion $x(t) = (e^{-t},0,-e^{-t})$ ist eine Lösung $\neq 0$ mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

$0 < a < 1$: Das charakteristische Polynom von A lautet $-(\lambda-a)(\lambda-\sqrt{1-a^2})(\lambda+\sqrt{1-a^2})$. Die Eigenwerte sind paarweise verschieden und $-\sqrt{1-a^2}$ ist ein negativer Eigenwert. Wir können A diagonalisieren, d. h. wir finden eine invertierbare 3×3-Matrix T mit

$$T \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} T^{-1} = A.$$

Aus der allgemeinen Theorie ist bekannt, dass die Funktion $x(t) = \exp(tA)T(0,0,1)$ eine Lösung darstellt. Es gilt $x(t) = T(0,0,e^{-\sqrt{1-a^2}t})$, was wegen der Stetigkeit von T für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert und daher ein Beispiel für eine nichttriviale Lösung mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ liefert.

$a = 1$: Wir geben ein Fundamentalsystem an: Die Funktionen $x_1(t) = (1,1,0), x_2(t) = (t,t+1,0)$ und $x_3(t) = (0,0,e^t)$ sind Lösungen der Differentialgleichung. Weil $x_1(0) = (1,1,0), x_2(0) = (0,1,0)$ und $x_3(0) = (0,0,1)$ linear unabhängig sind, bilden diese ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung hat also die Form $x(t) = (a+bt, a+b+bt, ce^t)$. Damit diese für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, muss $c = 0 = b$ sein, sonst sind die dritte oder die ersten beiden Komponenten unbeschränkt. Es ergibt sich $x(t) \equiv (a,a,0)$, was genau für $a = 0$ gegen 0 konvergiert. Dann folgt aber $x(t) \equiv 0$. In diesem Fall existiert also keine nichttriviale Lösung mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

$a > 1$: Wir geben wieder ein Fundamentalsystem an, nämlich die Funktionen

$$x_1(t) = (\cos(\sqrt{a^2-1}t), \frac{1}{a}\cos(\sqrt{a^2-1}t) - \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\sin(\sqrt{a^2-1}t, 0)$$
$$x_2(t) = (\sin(\sqrt{a^2-1}t), \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cos(\sqrt{a^2-1}t) + \frac{1}{a}\sin(\sqrt{a^2-1}t), 0)$$
$$x_3(t) = (0,0,e^{at})$$

Analog zu $a = 1$ existiert hier keine Lösung mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

$\mathcal{J.F.B.}$