Herbst 13 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $W(y) := |y|^{-12} - 2|y|^{-6}$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + W'(u(x)) = 0,$$
$$u(0) = u_0,$$
$$\frac{du}{dx}(0) = 0$$

zu beliebigen reellen Zahlen $u_0 \neq 0$.

a) Skizzieren Sie $W(\cdot)$.

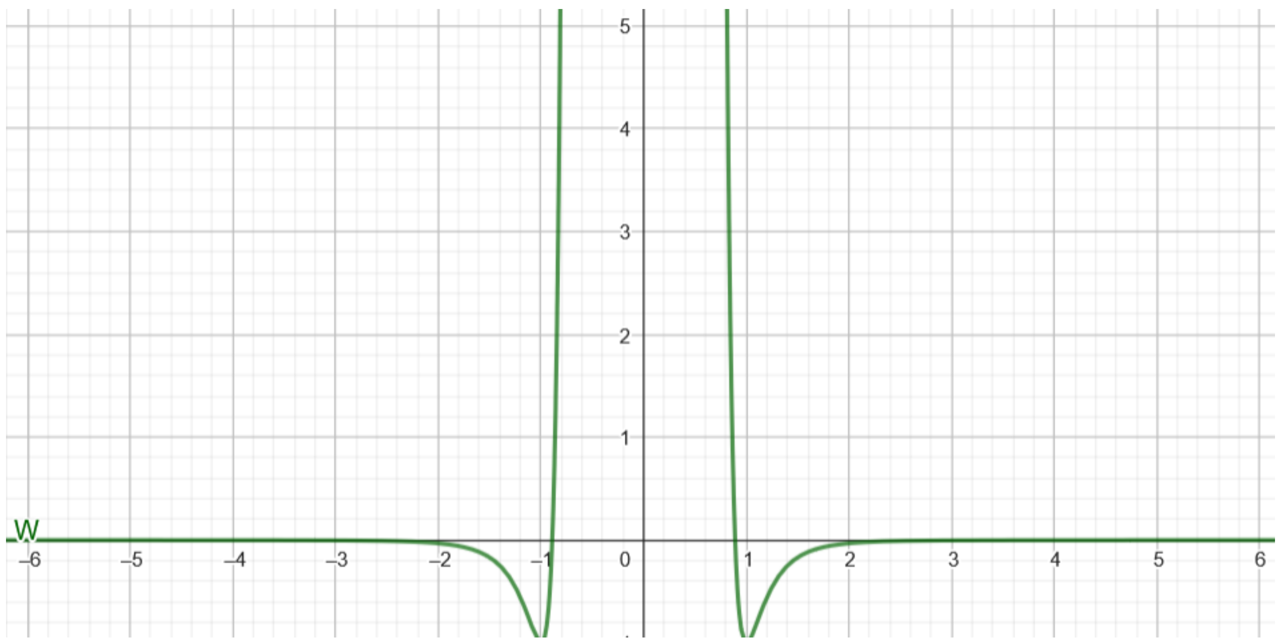
b) Zeigen Sie, dass

$$L(u) := \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + W(u)$$

eine Erhaltungsgröße ist.

c) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige reelle Zahlen $u_0 \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und dass Lösungen ihr Vorzeichen nicht wechseln.

Lösungsvorschlag:

a) 

b) Falls $u : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ eine Lösung ist, folgt $L(u(t))' = u''(t)u'(t) + W'(u(t))u'(t) = u'(t)(u''(t) + W'(u(t)) = u'(t) \cdot 0 = 0$, also ist $t \mapsto L(u(t))$ konstant auf Lösungskurven und L daher eine Erhaltungsgröße.

c) Die Funktion W ist, wegen $|y|^2 = y^2$, auch als $W(y) = y^{-12} - 2y^{-6}$ darstellbar und daher zweimal stetig differenzierbar mit $W'(y) = 12y^{-7} - 12y^{-13}$ und $W''(y) = 156y^{-14} - 84y^{-8}$, weshalb W' lokal lipschitzstetig ist. Eine Reformulierung in ein äquivalentes System erster Ordnung, also mittels $a = u, b = u'$ zu
$a' = b, a(0) = u_0, b' = -W'(a), b(0) = 0$ zeigt nach Anwendung vom Satz von Picard-Lindelöf die eindeutige Existenz einer Maximallösung. Würde eine Lösung ihr Vorzeichen wechseln, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz auch eine Nullstelle einer Lösung. Dies steht aber im Widerspruch zum Lösungsbegriff, weil W und daher W' bei 0 nicht definiert sind. Lösungen wechseln ihr Vorzeichen also nicht. Zuletzt bleibt noch die Existenz jeder Maximallösung auf $\mathbb{R}$ zu beweisen. Sei dafür $u : \mathbb{R} \supsetneq I \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Wir wollen einen Widerspruch herbeiführen. Nach b) gilt $L(u(x)) = L(u(0)) = W(u_0)$ für alle $x \in I$. Also ist $\frac{1}{2}u'(x)^2 + W(u(x)) = W(u_0)$ und wegen der Nichtnegativität von reellen Quadraten folgt $W(u(x)) \leq W(u_0)$ für alle $x \in I$. Falls I nach unten beschränkt ist, sei $a := \inf I$, dann muss nach der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen, u für $x \searrow a$ entweder gegen 0 konvergieren oder unbeschränkt sein. Aus $u(x) \to 0$ würde $W(u(x)) \to \infty$ folgen, ein Widerspruch zu $W(u(x)) \leq W(u_0)$, also muss u unbeschränkt sein. Wir nehmen jetzt $u_0 > 0$ an, dann ist auch $u(x) > 0$ und weil u unbeschränkt ist, gibt es eine positive untere Schranke von u auf $(a{,}0]$ und folglich eine obere Schranke $K > 0$ an $|W \circ u|$ auf $(a{,}0]$. Mit Anwendung der Hölderungleichung folgt für alle $t \in (a{,}0]$ die Ungleichung

$$||u(t)| - u_0| \leq |u(0) - u(t)| \leq \int_t^0 |u'(s)| \, \mathrm{d}s \leq \left(\int_t^0 u'(s)^2 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_t^0 1 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Das zweite Integral ist nach oben durch $\sqrt{-a}$ beschränkt; für das erste können wir mit der Erhaltungsgröße $u'(s)^2 = 2W(u_0) - 2W(u(s))$ ansetzen, was betragsmäßig gegen $4K$ beschränkt ist. Damit ist die linke Seite von (1) unbeschränkt, weil $|u(t)| \to \infty$ für $t \searrow a$ gilt, die rechte Seite ist für $t \searrow a$ dagegen beschränkt gegen $-2\sqrt{Ka}$; ein Widerspruch. Also ist u beschränkt bei a. Nach der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen, muss $a = -\infty$ sein. Völlig analoges Vorgehen zeigt die gleiche Aussage im Fall $u_0 < 0$ und für nach oben beschränkte I setzt man $b := \sup I$, unterscheidet wieder $u_0 > 0$ und $u_0 < 0$ und erhält auf ähnlich Weise, dass $u(t)$ für $t \nearrow b$ nicht gegen 0 konvergiert, aber beschränkt bleibt und erhält somit $b = \infty$. Insgesamt folgt $I = \mathbb{R}$ und die globale Existenz jeder Maximallösung auf $\mathbb{R}$ ist bewiesen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$