H13T2A4

Betrachte die Differentialgleichung $y' = t^2\sqrt{1+2y}$

a) Gebe die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty[$ an. Warum ist sie dort eindeutig?

b) Betrachte die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$. Gebe zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an.

Zu a):

$$(1) \begin{cases} x' = g(t)h(x) \text{ mit stetigem } g : I \to \mathbb{R} \quad , \quad h : J \to \mathbb{R} \\ \text{mit } x(\tau) = \xi \quad (\tau \in I \quad , \quad \xi \in J) \quad (I, \quad J \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervalle }) \end{cases}$$

Fall 1: $h(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda : I \to \mathbb{R}\ t \to \xi$ löst (1)

Fall 2: $h(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ Dann hat (1) in einer Umgebung von τ eine eindeutige Lösung $\lambda : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ (mit Intervall $\tilde{I} \subseteq I$, $\tau \subset \tilde{I}$).
Diese ergibt sich durch Auflösen von

$$\int_\xi^{\lambda(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_\tau^t g(s)ds \text{ nach } \lambda(t)$$

Trennen der Variablen: $h : [-\frac{1}{2}, \infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt{1+2y}$ stetig, $h(0) = 1$

$$\sqrt{1+2y}\Big|_0^{\lambda(t)} = \int_0^{\lambda(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+2y}} = \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}s^3\Big|_0^t = \frac{t^3}{3}$$

$$\sqrt{1+2\lambda(t)} = \frac{t^3}{3} \Leftrightarrow 1 + 2\lambda(t) = (1 + \frac{t^3}{3})^2$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2 - 1\Big) \text{ als Kandidat für eine Lösung } \lambda(0) = 0$$

$$\lambda'(t) = \Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)t^2 = t^2\sqrt{1+2\lambda(t)} \text{ falls } \Big(1+\frac{t^3}{3}\Big) \geq 0 \text{ dh. } t \geq \sqrt[3]{-3}$$

$$\Rightarrow \lambda : [\sqrt[3]{-3}, \infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2 - 1\Big) \text{ löst } y' = t^2\sqrt{1+2y}, \quad y(0) = 0$$

$$\text{und } \lambda|_{[0,\infty[} : [0, \infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2 - 1\Big) \text{ ist die gesuchte Lösung}$$

$$f : \mathbb{R}\times] - \frac{1}{2}, \infty[\to \mathbb{R} \quad (t, y) \mapsto t^2\sqrt{1+2y}$$

$$\mathbb{R}\times] - \frac{1}{2}, \infty[\text{ offen, zusammenhängend, } f \in C^1(\mathbb{R}\times] - \frac{1}{2}, \infty[)$$

$\Rightarrow$ Auf $x' = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$ (mit $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in] - \frac{1}{2}, \infty[$) ist der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.
Für $t \geq 0$ ist $\lambda(t) = \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2 - 1\Big) \geq 0$, dh. $(t, \lambda(t)) \in \mathbb{R}\times] - \frac{1}{2}, \infty[$ für

$t \geq 0$, dh. $\lambda|_{]-\frac{1}{2},\infty[}$ löst $x'(t) = f(t,x)$, $x(0) = 0$ ist laut globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Einschränkung der maximalen Lösung $\lambda_{(0,0)} : I_{(0,0)} \to \mathbb{R}$ von $x'(t) = f(t,x)$, $x(0) = 0$ und damit eindeutig.
Kandidat für maximale Lösung. Betrachte das Randverhalten ($a \neq -\infty$)

$$\mu :]-\sqrt[3]{3}, \infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\Big(1 + \frac{t^3}{3}\Big)^2 - 1\Big)$$

$$\mu(t) \xrightarrow{t \searrow -\sqrt[3]{3}} -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{t \searrow -\sqrt[3]{3}} \operatorname{dist}\Big((t, \mu(t)), \mathbb{R} \times \Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\Big) = 0$$

$$\partial V = \partial\Big(\mathbb{R} \times]-\frac{1}{2}, \infty[\Big) = \mathbb{R} \times \Big\{-\frac{1}{2}\Big\}$$

(Bild)

Zu b):

$$y' = t^2\sqrt{1+2y}, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$$

hat die konstante Lösung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto -\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+2y}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\mu(t)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\mu(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+2y}} = \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}s^3\Big|_0^t = \frac{t^3}{3}$$

$$\sqrt{1+2\mu(t)} = \frac{t^3}{3}; \quad 2\mu(t) = \frac{t^6}{9} - 1; \quad \mu(t) = \frac{t^6}{18} - \frac{1}{2}$$

$$\mu'(t) = \frac{t^5}{3}; \quad \mu(0) = -\frac{1}{2}$$

$$t^2\sqrt{1+2\mu(t)} = t^2\sqrt{\frac{t^6}{9}} \begin{cases} \frac{t^5}{3} & \text{für } t \geq 0 \\ -\frac{t^5}{3} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ $t \mapsto \frac{t^6}{18} - \frac{1}{2}$ ist eine weitere Lösung.