**Herbst 13 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, und in $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gelte $\nabla f(x_0) = 0$ und $D^2 f(x_0) = 0$. Dann hat $f$ kein lokales Extremum in $x_0$.

b) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) = (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3})^{\mathrm{T}}$ auf $\mathbb{R}^3$. Das Kurvenintegral über $F$ ist wegunabhängig.

c) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei beschränkt längs der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid z = t(1+i), t \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $f$ konstant.

**Lösungsvorschlag:**

a) Diese Aussage ist falsch. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^2$ erfüllt die konstante Funktion $f \equiv c$ $\nabla f(x_0) = 0$ und $D^2 f(x_0) = 0$ und $x_0$ ist sowohl ein lokales als auch ein globales Minimum und Maximum. (Für ein striktes Optimum kann man auch $f(x, y) = \pm(x^4 + y^4)$ betrachten.)

b) Diese Aussage ist wahr. Wegen $\nabla F = \nabla F$ ist $F$ ein Gradientenfeld. Kurvenintegrale über Gradientenfelder hängen nur von den Endpunkten, nicht aber vom Weg ab.

c) Diese Aussage ist falsch. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \cos(\frac{z}{1+i})$ ist holomorph und nicht konstant (wegen $f(0) = 1 \neq \cos 1 = f(1+i)$); für $z = t(1+i), t \in \mathbb{R}$ gilt aber $|f(z)| = |\cos(t)| \leq 1$, weshalb $f$ auf der Geraden beschränkt ist.

$\mathcal{J.F.B.}$