Herbst 13 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} \big| |w| < 1\}$$

an.
Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \big| 0 < \text{Im } z < \pi\}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.

Lösungsvorschlag:

Wir beginnen mit der Möbiustransformation $T : G \to S$ und leiten diese zunächst durch geometrische Überlegungen her. Die Inversion bildet Kreise, deren Mittelpunkte auf der Realteilachse liegen, und die den Ursprung berühren, auf Parallelen der Imaginärteilachse ab. Das Gebiet G wird durch die Kreise mit Radius 1 um 0 und mit Radius $\frac{1}{2}$ um $\frac{1}{2}$ begrenzt, welche sich in 1 schneiden. Wir verschieben G also zunächst um eine Einheit nach links und wenden anschließend die Inversion an. Dies bildet G auf den Streifen ab, der durch die Geraden $\{-1 + iy : y \in \mathbb{R}\}$ und $\{-\frac{1}{2} + iy : y \in \mathbb{R}\}$ begrenzt wird. Wir drehen diesen Streifen um 90° im Uhrzeigersinn und verbreitern den Streifen auf eine Dicke von π. Dies entspricht einer Multiplikation mit $-2\pi i$. Zuletzt verschieben wir den Streifen um π Einheiten nach unten, was einer Substraktion von πi entspricht. Insgesamt erhalten wir $T : G \to S, T(z) := \frac{\pi z+\pi}{iz-i} = -i\pi\frac{z+1}{z-1}$; es bleibt zu zeigen, dass $T : G \to S$ biholomorph ist.
Wegen $1 \notin G$ ist $T : G \to \mathbb{C}$ eine wohldefinierte, holomorphe Abbildung. Nach der Theorie der Möbiustransformationen ist T sogar injektiv auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, also erst recht auf G. Es bleibt also nur $T(G) = S$ zu zeigen. Wir erhalten $T(z) = -i\pi\frac{|z|^2-1-2i\text{Im}(z)}{|z|^2-2\text{Re}(z)+1}$ und daher $\text{Im}(T(z)) = \frac{\pi(1-|z|^2)}{|z|^2-2\text{Re}(z)+1}$. Der Nenner ist $|z - 1|^2$ also strikt positiv und für $z \in G$ ist auch der Zähler strikt positiv. Damit ist der Imaginärteil also strikt positiv. Zu zeigen bleibt $\frac{\pi(1-|z|^2)}{|z|^2-2\text{Re}(z)+1} < \pi$, was sich zu $1 - |z|^2 < 1 + |z|^2 - 2\text{Re}(z)$ umstellen lässt, was wiederum äquivalent zu $\text{Re}(z) < |z|^2$ ist. Für $z = x + iy \in G$ gilt wegen des streng monotonen Wachstums von $x \mapsto x^2$ auf $[0, \infty)$

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \iff x^2 - x + y^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \iff x < |z|^2,$$

wegen $x = \text{Re}(z)$ also auch $\text{Im}(T(z)) < \pi$. Damit ist $T(G) \subset S$ bewiesen.
Für die umgekehrte Inklusion invertieren wir T und erhalten aus der Theorie der Möbiustransformationen $T^{-1}(z) = \frac{z-i\pi}{z+i\pi}$. Wir müssen nur noch $T^{-1}(z) \in G$ für $z \in S$ zeigen. Wir formen $|T^{-1}(z)| < 1$ um, indem wir erst quadrieren und dann den Nenner multiplizieren und erhalten für $z = x + iy$, dass $|T^{-1}(z)| < 1$ äquivalent zu

$$|z-i\pi|^2 < |z+i\pi|^2 \iff x^2+(y-\pi)^2 < x^2+(y+\pi)^2 \iff -2\pi y < 2\pi y \iff y > 0$$

ist, also, dass $|(T^{-1}(z)| < 1$ für $\text{Im}(z) > 0$ ist.

Um $|T^{-1}(z)-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$ für $z\in S$ zu zeigen, quadrieren wir wieder und formen $T^{-1}(z)-\frac{1}{2}$ zu $\frac{z-3i\pi}{2z+2i\pi}$ um. Daher ist für $z=x+iy$ die Bedingung $|T^{-1}(z)-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$ äquivalent zu

$$4|z-3i\pi|^2>|2(z+i\pi)|^2 \iff x^2+(y-3\pi)^2>x^2+(y+\pi)^2 \iff 8\pi^2>8\pi y,$$

was nach Division durch $8\pi>0$ auf $y<\pi$ führt. Also ist $|T^{-1}(z)-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$ für $\mathrm{Im}(z)<\pi$.
Für $z\in S$ gilt daher auch $T^{-1}(z)\in G$ und es folgt $T(G)=S$. Damit ist $T:G\to S$ biholomorph.
Wir betrachten jetzt $\exp:S\to\mathbb{C}$. Diese ist auf S injektiv, denn es gilt bekanntlich $\exp(z)=\exp(w) \iff \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)+2\pi k$ für ein $k\in\mathbb{Z}$, was für $w,z\in S$ wegen $\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(w)\in(-2\pi,2\pi)$ schon $k=0$ und damit dann $z=w$ impliziert. Natürlich ist exp holomorph und damit biholomorph auf das Bild von S. Für $x+iy\in S$ ist $y\in(0,\pi)$ und $\sin(y)>0$, also $\exp(x+iy)=e^x(\cos(y)+i\sin(y))\in\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}(z)>0\}$. Ist dagegen $re^{i\phi}\in\mathbb{H}$, also $\phi\in(0,\pi)$, so gilt $\exp(\ln(r)+i\phi)=re^{i\phi}$. Daher bildet exp die Menge S biholomorph auf $\mathbb{H}$ ab. Die Cayleytransformation C bildet nun bekanntermaßen $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{E}$ ab, also ist $C\circ\exp\circ T:G\to\mathbb{E}$ eine biholomorphe Abbildung wie gefordert.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$