Herbst 13 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des $x = x(t)$ des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = v$ genügt, und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

Lösungsvorschlag:

- Wir bestimmen zunächst ein Fundamentalsystem, dafür berechnen wir das Matrixexponential $\exp(tA)$. Wir bestimmen die Jordannormalform von A : Das charakteristische Polynom lautet $-y(3-y)(1-y)+3-(3-y)-y+2(1-y) = (1-y)(y^2-3y+2) = (1-y)(y-2)(y-1)$ und besitzt die doppelte Nullstelle 1 und die einfache Nullstelle 2. Als Eigenvektor zu 2 wählen wir (1,1,0), als Jordankette zu 1 wählen wir (1,1,1) und berechnen das Bild dessen unter $A - \mathbb{1}$ um (-1,-1,0) zu erhalten. Wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  und daraus dann

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t & -te^t \\ (1-t)e^t - e^{2t} & e^{2t} + te^t & -te^t \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

- Die Spalten bilden ein Fundamentalsystem; die allgemeine Lösung erhält man daraus durch Linearkombination, also ist

$$x(t) = \begin{pmatrix} ae^t + (b-a-c)te^t \\ (b-a)e^{2t} + (b-a-c)te^t + ae^t \\ (b-a)e^{2t} + (a-b-c)e^t \end{pmatrix}$$

  die allgemeine Lösung für $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Diejenige Lösung ist $\exp(tA)v$, also $x(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ (1-t)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$.

- Die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der Linearität der Differenzialgleichung und dem Satz von Picard-Lindelöf, weil die Strukturfunktion Lipschitzstetig ist ($|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leq \|A\| \, |x-y|$).

J.F.B.