Herbst 13 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Konstruieren Sie jeweils eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften oder begründen Sie, warum es eine solche nicht geben kann.

a) f bildet $\mathbb{C}$ auf die offene Kreisscheibe $D = \{u + iv : (u-1)^2 + v^2 < 4\}$ ab.

b) $f(z) = 0$ gilt genau für $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) f erfüllt $f(0) = 2$ und $|f(z)| \le 1$ für $|z| = 1$.

Lösungsvorschlag:

a) Eine solche gibt es nach dem Satz von Liouville nicht. Ist $f : \mathbb{C} \to D$ eine holomorphe Abbildung, so ist sie ganz und beschränkt, wegen $|u+iv| \le |(u-1)+iv|+|1| < 2+1 = 3$ für alle $u + iv \in D$, also $|f(z)| < 3$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist f bereits konstant. Eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\mathbb{C}) \subset D$ gibt es demnach nicht.

b) $f(z) = \sin(\pi z)$ hat diese Eigenschaft, natürlich ist diese Funktion holomorph und nichtkonstant. Für $u + iv \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(u+iv) = \sin(\pi u + i\pi v) &= \sin(\pi u)\cosh(\pi v) + i\cos(\pi u)\sinh(\pi v) \overset{!}{=} 0 \\ &\iff \sin(\pi u)\cosh(\pi v) = 0 = \cos(\pi u)\sinh(\pi v) \\ &\overset{\cosh(\cdot)>0}{\iff} \sin(\pi u) = 0 = \cos(\pi u)\sinh(\pi v). \end{aligned}$$

Natürlich ist jede ganze Zahl eine Nullstelle von f. Aus $\sin(\pi u) = 0$ folgt umgekehrt bereits $u \in \mathbb{Z}$ und daher $\cos(\pi u) \in \{-1{,}1\}$. Die zweite Gleichung ist zusätzlich also genau dann erfüllt, wenn $\sinh(\pi v) = 0 \iff \pi v = 0 \iff v = 0$ gilt $(\pi > 0)$. Damit sind die Nullstellen von f genau die Zahlen $u + iv \in \mathbb{C}$ mit $v = 0$ und $u \in \mathbb{Z}$, also genau die ganzen Zahlen.

c) Eine solche Funktion existiert nicht. Aus dem Maximumsprinzip folgt für alle nichtkonstanten ganzen Funktionen sowie für alle $z \in B_1(0)$ bereits die Ungleichung $|f(z)| < \max\limits_{z \in \partial B_1(0)} |f(z)| \le 1$. Wegen $0 \in B_1(0)$ und $|2| = 2 > 1$, kann also nicht $f(0) = 2$ sein.

$\mathcal{J.F.B.}$